

2. välikoe, 15.12.2005

Merkitse paperiin selvästi: C3, 2 välikoe, päivämäärä, nimi, osasto, opintokirjan numero ja allekirjoituksesi.

Kokeessa ei saa käyttää taulukoita tai ohjelmoitavia apuvälineitä.

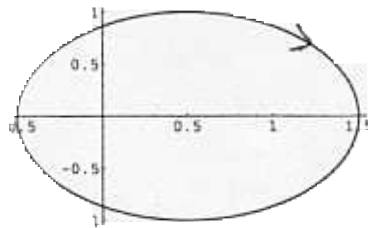
∪ Tehtävä 1 a. Anna Cauchy-Riemannin yhtälöt ja päättele niiden avulla, josko $f(z) = z\bar{z}$ on analyyttinen.

b. Mille $a \in \mathbf{R}$, $u(x, y) = e^{ax} \cos 5y$ on harmoninen? Etsi u :n harmoninen konjugaatti eli funktio $v(x, y)$ siten, että $u + iv$ on analyyttinen.

∅ Tehtävä 2 a. Luonnostele joukon $\{z \mid |\arg(z)| \leq \pi/6\}$ kuva kuvauksessa $w = z^3$.

b. Millainen on joukon $\{z \mid 1 \leq |z| \leq e, \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2\}$ kuva kuvauksessa $w = \ln z$?

∅ Tehtävä 3. Laske $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z} dz$ kun C on ellipsi $\{z \mid (x-1/2)^2 + 4y^2 = 1\}$ myötäpäivään ympäriinsä kuljettuna.



∅ Tehtävä 4. Määrittele 1-puolinen \mathcal{Z} -muunnos. Anna esitys jonojen $\{x_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ ja $\{b^n x_n\}_{n=0}^{\infty}$ muunnoksille jonon $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ muunnoksen $X(z)$ avulla.

∪ Tehtävä 5. Laske funktion $|x|$, $-\pi < x < \pi$ Fourier-sini- ja Fourier-kosinisarjojen kolme ensimmäistä termiä.

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{z(z+1)} + \frac{z}{z(z^{-1})} = \frac{z^{-1}}{z^2+z}$$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} (\cos(nx)) \right)$$