

Tentti, 30.1.2006

Merkitse paperiin selvästi: C3, tentti, päivämäärä, nimi, osasto, opintokirjan numero ja allekirjoituksesi.

Kokeessa ei saa käyttää taulukoita tai ohjelmoitavia apuvälineitä. Perustele vastauksesi!

Tehtävä 1. Neliömatriisi on permutaatiomatriisi, jos sen jokaisella rivillä ja jokaisessa sarakkeessa on yksi 1 ja muut alkiot ovat 0.

- Onko permutaatiomatriisi kääntyvä?
- Onko se milloinkaan ortogonaalinen?

Tehtävä 2. Laske ominaisarvot ja -vektorit, sekä diagonalisoi:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & -10 \\ 10 & 5 & -20 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 3. Ratkaise Laplace-muuntamalla

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

kun $\mathbf{x}(0) = (0, 1)^T$.

- Tehtävä 4 a.** Onko $f(z) = |z|^2$ derivoituva ja jos on, niin missä? Entä analyyttinen?
- b.** Onko $v(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ harmoninen? Jos on, niin anna sen harmoninen konjuugaatti eli funktio u siten, että $u + iv$ on analyyttinen.

Tehtävä 5. Laske

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2(z-1-i)} dz$$

kun C on **a.** $|z| = 2$ vastapäivään, **b.** $|z| = 1$ myötäpäivään.

Tehtävä 6. Laske funktion $f(x) = x + \pi$, $-\pi < x \leq \pi$ periodisen jatkeen Fourier-sarja.