Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Somersalo/Dahl/Pursiainen

Mat-1.1220 Matematiikan peruskurssi S2

2. välikoe 26.03.2007

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa on laskimen käyttö sallittu

1. Tutki, onko seuraavilla origon ulkopuolella määritellyillä funktioilla raja-arvo origossa:

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^{4/3}+y^4}, \quad \text{(b)} \quad f(x,y) = \frac{xy}{1+x^{4/3}+y^4}.$$

   Perustele huolella vastauksesi.

2. Olkoon

$$f(x,y) = 2x/(1+y^2).$$

   (a) Laske funktion osittaisderivaatat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

   (b) Laske f:n suunnattu derivaatta vektorin $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ suuntaan pisteessä $(x,y) = (1,1)$.

   (c) Määrää tasa-arvokäyrän $f(x,y) = 1$ normaalivektori pisteessä $(x,y) = (1,1)$.

   (d) Laske f:n osittaisderivaattoja käyttäen pinnan $z = f(x,y)$ normaalivektori pisteessä $(x,y,z) = (1,1,1)$.

3. Etsi taloudellisin muoto (materiaalikustannukset tilavuuteen nähden) kannettomalle kupille, joka pohja on ympyrän muotoinen.

4. Hahmottele pinnat $z = 5 - x + y$, $x^2 + y^2 = 1$ ja $z = 0$, ja laske niiden rajoittaman kolmiulotteisen kappaleen tilavuus käyttämällä polaarikoordinaatteja.

* Lagrangen kertoimen avulla

Tehtävä 1

(a) Funktio

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^{4/3}+y^4}$$

ei ole määritelty origossa, mutta sillä voi olla siellä raja-arvo.

1° Tutkitaan ensin raja-arvoa x-akselia pitkin:

$$\left.\frac{xy}{x^{4/3}+y^4}\right|_{x=0} = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0.$$

2° Kuitenkin

$$\left.\frac{xy}{x^{4/3}+y^4}\right|_{x=y^3} = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

Ristiriidasta seuraa, että funktiolla ei ole raja-arvoa origossa.

(b) Funktio

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^{4/3}+y^4}$$

on jatkuva kaikkialla, sillä xy, $x^{4/3}$ sekä y^4 ovat jatkuvia ja $x^{4/3} \geq 0$, $y^4 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^{4/3}+y^4 \geq 0 \iff 1+x^{4/3}+y^4 \geq 1$. Siten

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Huom! Raja-arvon olemassaoloa ei voi todistaa yksittäistapauksia tutkimalla. L'Hôpitalin sääntöä voi soveltaa vain, jos raja-arvo on olemassa.

(2.) $f(x,y) = \frac{2x}{1+y^2}$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{1+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4xy}{(1+y^2)^2}$$

(1 p.)

b)

$\bar{u} = \vec{i} + \vec{j}$ piste $(1,1)$

$$D_u f = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} \cdot \nabla f(1,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

(1 p.)

c)

$f(x,y) = 1$ normaalivektori pisteessä $(1,1)$

$f(1,1) = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1 \Rightarrow$ on funktion tasa-arvokäyrä

$\bar{n} = \nabla f = \vec{i} - \vec{j}$ (2 p.)

d)

$z = f(x,y)$ piste $(a, b, f(a,b)) = (1,1,1)$

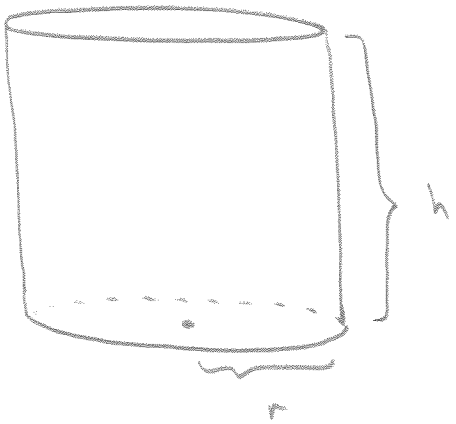
$$\bar{n} = f_1(a,b)\vec{i} + f_2(a,b)\vec{j} - \vec{k}$$

$$= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

(2 p.)

(T3) Etsi taloudellisin muoto (materiaali- kustannukset tilavuuteen nähden) kannettomalle kupille jonka pohja on ympyrän muotoinen.

Kuppi:



Kupin tilavuus $V = \pi r^2 \cdot h$

Materiaalikustannukset: $C(\pi r^2 + h \cdot 2\pi r)$

↑ vakio.

Saadaan optimointitehtävä sidosehdolla:

minimoi $f(r,h) = r^2 + 2hr$

ehdolla $g(r,h) = \pi r^2 \cdot h - V = 0$

Ratkaistaan tehtävä Lagrangen kertoimen menetelmällä: Ratkaisu saadaan yhtälöistä:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,h) = \lambda \frac{\partial g}{\partial r}(r,h)$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(r,h) = \lambda \frac{\partial g}{\partial h}(r,h), \quad g(r,h) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2r + 2h = \lambda \cdot 2\pi r\, h & (1) \\ 2r = \lambda \cdot \pi r^2 & (2) \\ \pi r^2 h = V & (3) \end{cases}$$

Voidaan olettaa, että $r > 0$ jolloin

$$(2) \Rightarrow \quad 2 = \lambda \pi r$$

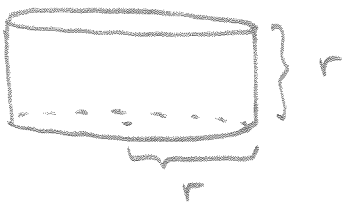
Sijoitus yhtälöön (1) antaa

$$2r + 2h = \underbrace{\lambda \pi r}_{=2} \cdot 2h$$

$$\Rightarrow \quad 2r = 4h - 2h = 2h$$

$$\Rightarrow \quad r = h$$

Muoto:



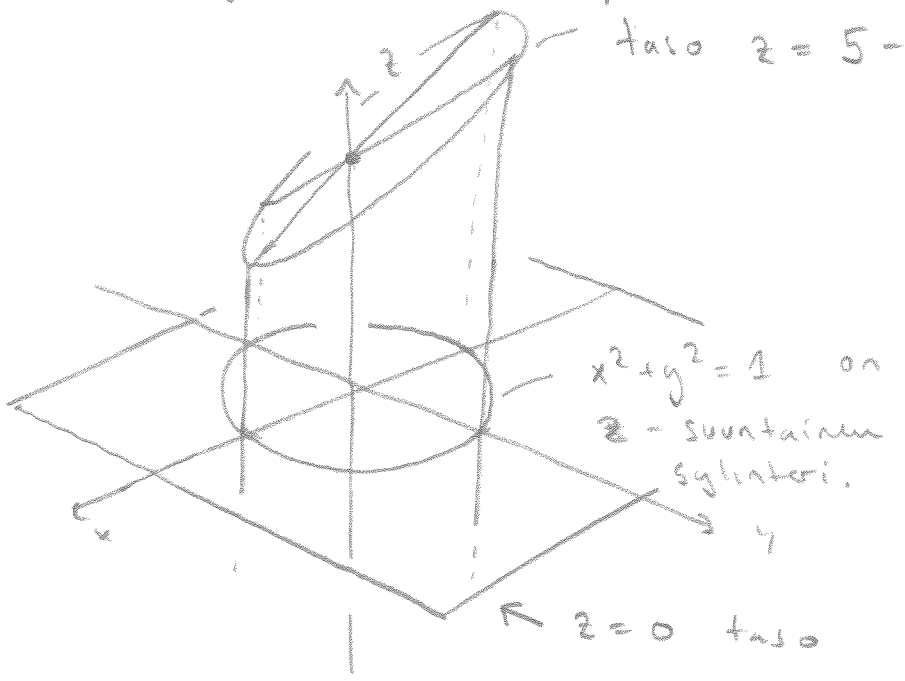
(T4) Hahmottele pinnat

$$z = 5 - x + y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$z = 0,$$

ja laske niiden rajoittaman kappaleen tilavuus käyttämällä polaarikoordinaatteja.



Kappaleen pohja on yksikköympyrä

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Kysytty tilavuus on

$$V = \iint_D 5 - x + y \, dA$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Siirrytään napakoordinaatteihin:

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(5 - r\cos\theta + r\sin\theta\right) r \, dr \, d\theta$$

↑ Huom. Jacobiaani

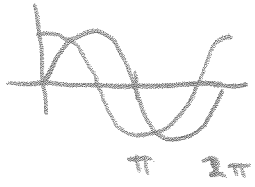
$$= \int_0^1 \frac{5}{2} r^2 + \frac{1}{3} r^3 (\sin\theta - \cos\theta)$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{1}{3}(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{5}{2} + \frac{1}{3}(\sin\theta - \cos\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{5\theta}{2} + \frac{1}{3}(-\cos\theta - \sin\theta)$$

$$= 5\pi + \frac{1}{3}\Big(-\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - \underbrace{\sin 2\pi}_{=0} + \underbrace{\cos 0}_{=1} + \underbrace{\sin 0}_{=0}\Big)$$



$$= 5\pi$$