T-61.3010 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

2. välikoe / tentti, ma 7.5.2007 klo 8-11. Salit B (A-M), M (N-Ö, non-Finnish).

Jos teet **2. välikokeen**, vastaa tehtäviin **1-2**. 2. vk on oikeus tehdä **vain kerran joko 7.5. tai 15.5.**

Jos teet **tentin**, vastaa tehtäviin **2-5**. Tentti on oikeus tehdä **vain kerran joko 7.5. tai 15.5.**

Kirjoita päällimmäisen konseptin alkuun isolla vastaatko **välikokeeseen vai tenttiin!** Rastita myös monivalintalomakkeesta oikea kohta "tentti" tai "välikoe".

Tilaisuudessa ei saa olla omaa taulukkokirjaa. Funktiolaskin / graafinen laskin muistit tyhjennettynä sallittu. Tilaisuudessa jaetaan kurssin taulukkomoniste sekä palautuslomake monivalintatehtävää (joko 1 tai 5) varten.

Kaikki konseptit palautettava, suttupaperit erikseen sekä **monivalintatehtävästä palautetaan erillinen A4-lomake.** Tehtäväpaperin ja taulukkomonisteen voi pitää.

Aloita uusi tehtävä **uudelta sivulta**. Kirjoita laskuissa käytetyt **välivaiheet mukaan.**

Muista myös **kurssipalaute**, josta saa yhden pisteen sekä välikokeeseen että tenttiin. Täytä www-lomake T-osaston palautejärjestelmässä, jonne linkki kurssin kotisivulta `http://www.cis.hut.fi/Opinnot/T-61.3010/`.

1) (**VAIN VÄLIKOE**, 14 x 1p, max 12 p) Monivalinta. Väittämissä on 1-4 oikeaa vastausta, mutta valitse **yksi ja vain yksi.** Täytä **erillisille lomakkeelle**, johon rastita myös, teetkö välikokeen vai tentin.

Oikea valinta +1 p, väärä valinta −0.5 p, ei valintaa 0 p. Perusteluja ei tarvita. Vastaa niin moneen kuin haluat. Tehtävän maksimipistemäärä on 12 ja minimimäärä 0.

1.1 Mikä suotimista on lineaarivaiheinen?

(A) $H(z) = 1/[1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}]$

(B) $h[n] = (0.5)^n \mu[n]$

zero phase

(C) $h[n] = 0.42 + 0.5 \cdot \cos(\pi n/M) + 0.08 \cdot \cos(2\pi n/M)$, kun $-M \leq n \leq M$, $M \in \mathbb{Z}_+$, ja $h[n] = 0$, kun $n < -M$ tai $n > M$.

(D) $h[n] = 0.6\delta[n] + 0.4\delta[n-1]$

1.2 Kuvan 1(a) LTI-suodin, jossa vakiot A ja B,

(A) saadaan lineaarivaiheiseksi valitsemalla A ja B sopivasti positiivisten kokonaislukujen joukosta

(B) suotimen siirtofunktio on $H(z) = 1/[1 - (A+B)z^{-1}]$

(C) suotimen nollat ovat kohdissa $z_1 = -A$ ja $z_2 = -B$

(D) mikään ylläolevista ei ole oikein

1.3 Kuvan 1(b) suodin, jossa $H_1(z) = 1 + z^{-1}$ ja $H_2(z) = 1 - z^{-1}$,

(A) on ryhmäviiveeltään $\tau(\omega) = 1.5, \forall\omega$

(B) ei ole lineaarivaiheinen

(C) on ristikkorakenteinen ("lattice")

(D) on IIR-tyyppinen

1.4 Tarkastellaan ensimmäisen asteen IIR-suodinta

$$H(z) = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

jossa $-0.8 \leq \alpha \leq 0.8$. Valitse α niin, että suotimen amplitudivasteen $|H(e^{j\omega})|$ maksimiarvo saa suurimman mahdollisimman arvon. Tämän jälkeen suodin skaalataan vakiolla K niin että skaalatun suotimen amplitudivasteen maksimiarvo on 1. Tällöin

(A) $K = 0.8$

(B) $K = 1$

(C) $K = 3$

(D) mikään ylläolevista ei ole oikein

1.5 Bilineaarimuunnos:

(A) s-tason oikea puolitaso kuvautuu yksikköympyrän sisälle

(B) s-tason taajuusakseli $j\Omega$ kuvautuu z-tason y-akseliksi

(C) s-tasossa oleva epästabiili suodin on myös z-tasossa epästabiili

(D) toteutetaan sijoituksella $s = \frac{2}{T}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$, jossa T on näytteenottoväli

1.6 Analogisuodin $H(s) = \Omega/(s - \Omega)$, jossa taajuusvääristymäkorjattu ("prewarped") rajataajuus $\Omega = k \cdot 0.5$, muutetaan digitaaliseksi $H(z)$ käyttäen bilineaarimuunnosta. Digitaalinen suodin on

(A) $H(z) = (-1)/(1 - 2k^{-1}z^{-1})$

(B) $H(z) = (1/3) \cdot (1 + z^{-1})/(1 - (1/3)z^{-1})$

(C) $H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - z^{-1})$

(D) $H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - 3z^{-1})$

1.7 Matlabissa halutaan suunnitella digitaalinen elliptinen ylipäästösuodin, jonka estokaista loppuu kohdassa 4000 Hz ja päästökaista alkaa kohdassa 5000 Hz. Näytteenottotaajuus on 20000 Hz. Komentoa `ellipord` varten taajuudet pitää normalisoida Matlabia varten. Oikea komento on:

(A) `[N, Wn] = ellipord(2*5000*pi, 2*4000*pi, 1, 40, 20000);`

(B) `[N, Wn] = ellipord(0.2, 0.25, 1, 40, 'high');`

(C) `[N, Wn] = ellipord(0.5, 0.4, 1, 40);`

(D) `[N, Wn] = ellipord(4000, 5000, 10000, 'HP');`

1.8 Ideaalisen ylipäästösuotimen $H_{HP}(z)$ rajataajuus on $\omega_c = 3\pi/4$. Tällöin

(A) $h_{HP}[0] = 0$

(B) $h_{HP}[0] = 0.25$

(C) $h_{HP}[0] = 0.75$

(D) $h_{HP}[0] = 1$

1.9 Väitteen 1.8 impulssivasteesta $h_{HP}[n]$ saadaan helposti alipäästösuodin $h[n]$ kertomalla (moduloimalla) lukujonolla $(-1)^n$, eli $h[n] = h_{HP}[n] \cdot (-1)^n$. Mikä on suotimen $h[n]$ rajataajuus?

(A) $\omega_c = \pi/4$

(B) $\omega_c = \pi/2$

(C) $\omega_c = 3\pi/4$

(D) $\omega_c = \pi$

1.10 Diskreetti Fourier-muunnos (DFT) voidaan laskea tehokkaasti hyödyntäen muunnosten symmetrisyysominaisuuksia. Kurssin pistelaskareissa laskettiin DFT:ä "radix-2 DIT FFT with modified butterfly computational module" -algoritmilla, joka on yksi monista FFT-algoritmeista.

Kuvassa 3 on kyseisen algoritmin laskennan kaaviokuva, kun muunnettavan sekvenssin pituus on $N = 128$. Perhosyhtälöt ovat:

$$\Psi_{r+1}[\alpha] = \Psi_r[\alpha] + W_N^l \Psi_r[\beta]$$
$$\Psi_{r+1}[\beta] = \Psi_r[\alpha] - W_N^l \Psi_r[\beta]$$

jossa $W_N = e^{-j2\pi/N}$.

Kun muunnettavana sekvenssinä on $x[n] = \{\underline{0}, 1, 2, 3, \ldots, 127\} = n$, niin mitä voidaan sanoa termistä $\Psi_3[87]$?

(A) $\Psi_3[87] = -1 - j$

(B) $\Psi_3[87] = -64 + 64j$

(C) $\Psi_3[87] = -64 - 64j$

(D) $\Psi_3[87] = 85 - 117j$

1.11 Tarkastellaan samaa rakennetta ja sekvenssiä kuin väittämässä 1.10. Mitkä ensimmäisen tason arvoista $\Psi_1[0], \ldots, \Psi_1[127]$ vaikuttavat "ulostulotason" termin $\Psi_8[87]$ arvoon?

(A) vain $\Psi_1[87]$

(B) vain $\Psi_1[23]$ ja $\Psi_1[87]$

(C) kaikki $\Psi_1[n]$, jossa $n = 0, \ldots, 127$

(D) mikään ylläolevista ei ole oikein

1.12 Tarkastellaan samaa rakennetta ja sekvenssiä kuin väittämässä 1.10. Laske summa $S = \Psi_6[0] + \Psi_6[32] + \Psi_6[64] + \Psi_6[96]$.

(A) $S = 6$

(B) $S = 192$

(C) $S = 8128$

(D) mikään ylläolevista ei ole oikein

1.13 Tutkitaan reaalisen sekvenssin $x[n]$ spektriä $|X(e^{j\omega})|$ kuvassa 2(a). Sekvenssi $x[n]$ syötetään monen näytteenottotaajuuden ("multirate") digitaalijärjestelmään $x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 4} \rightarrow y[n]$.

Mitä voidaan sanoa ulostulon spektristä (oletus: y-akselin skaalaukset oikein)?

(A) mikään allaolevista ei ole oikein

(B) ulostulon $y[n]$ spektri on kuvassa 2(b)

(C) ulostulon $y[n]$ spektri on kuvassa 2(c)

(D) ulostulon $y[n]$ spektri on kuvassa 2(d)

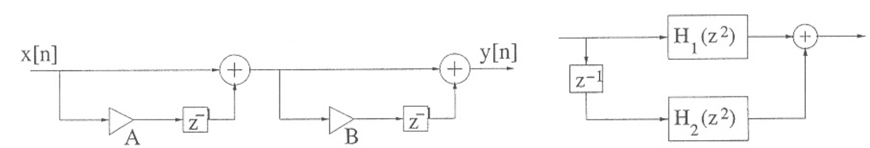
1.14 Digitaalisen sekvenssin näytteenottotaajuutta halutaan nostaa (7/5)-osaan alkuperäisestä. Kun käytössä on sopivat "anti-alias" ja "anti-imaging" suotimet $H_i(z)$, niin mikä järjestely tuottaa oikean lopputuloksen?

(A) $x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow y[n]$

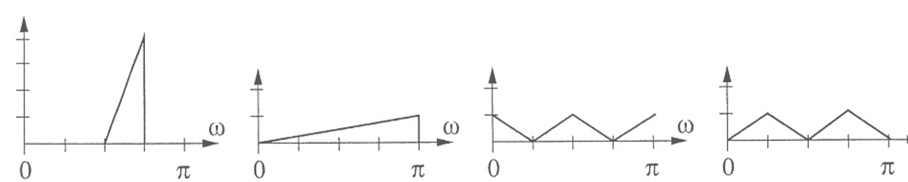
(B) $x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow y[n]$

(C) $x[n] \rightarrow \boxed{H_D(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow y[n]$

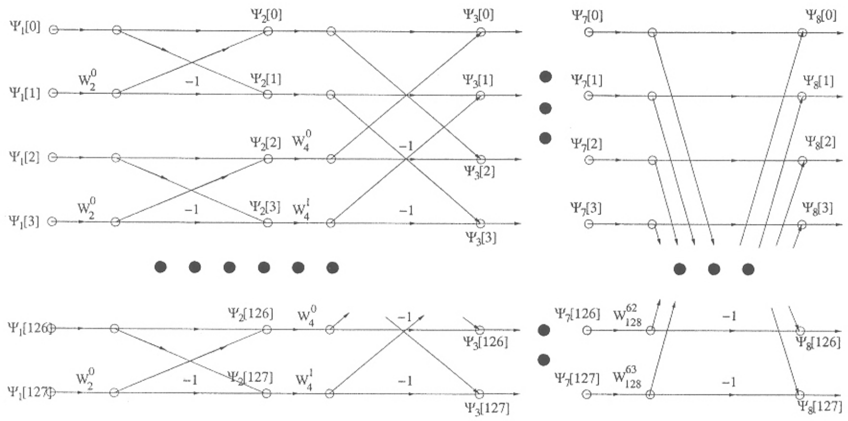
(D) $x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{H_I(z)} \rightarrow y[n]$



Kuva 1: (a) ja (b): Monivalintatehtävien 1.2 ja 1.3 kuvia.



Kuva 2: (a) $|X(e^{j\omega})|$, (b) **(B)** , (c) **(C)** ja (d) **(D)** : Monivalintatehtävän 1.13 kuvia.



Kuva 3: Monivalintatehtävien 1.10 – 1.12 ja 5.12 - 5.13 kuva.

2) (**VÄLIKOE ja TENTTI**, 6p) Essee: Äärellinen laskentatarkkuus ("finite wordlength") ja sen vaikutukset.

Ohjeistus: Käytä selkeää ja tarpeeksi **isoa** käsialaa. Jaottele tekstisi kappaleisiin. Jos hahmottelet kuvia, muista selittää ne. Luettavuus on yksi arviointikriteeri.

3) (**VAIN TENTTI**, 6p) Äänisignaalista, jonka näytteenottotaajuus $f_T = 20$ kHz, on laskettu erilaisia taajuusesityksiä ja havaittu, että hyötysignaali on taajuuksilla $0 \ldots 7000$ Hz ja häiriösignaali $8000 \ldots f_T/2$ Hz. Suunnitellaan FIR-tyyppinen alipäästösuodin ikkunamenetelmällä. Valitaan menetelmässä tarvittava -6 dB rajataajuus, joka vastaa siis ideaalisen suotimen rajataajuutta, kohtaan $f_c = 7500$ Hz ja siirtymäkaistan ("transition band") leveydeksi $\Delta f = 1000$ Hz. Käytetään ikkunointiin Blackman-ikkunaa, jonka tiedot löytyvät taulukosta 1.

a) Suotimen asteluvun kasvattaminen kaventaa siirtymäkaistan leveyttä. Arvioi sopiva asteluku N käyttäen taulukkoa 1.

b) Kirjoita ideaalisen alipäästösuotimen impulssivasteen lauseke $h_{\text{ideal}}[n]$. Laske ja ilmoita numeerisesti kolmen merkitsevän luvun tarkkuudella (esim. -140, 2.31, 0.00621) suotimen impulssivasteen arvot $h_{\text{ideal}}[-7]$, $h_{\text{ideal}}[0]$, $h_{\text{ideal}}[7]$ ja $h_{\text{ideal}}[2007]$.

c) Käyttäen Blackman-ikkunaa toteuta FIR-suodin $h_{\text{FIR}}[n]$ (a)-kohdan asteluvulla. Laske ja ilmoita numeerisesti kolmen merkitsevän luvun tarkkuudella suotimen impulssivasteen arvot $h_{\text{FIR}}[-7]$, $h_{\text{FIR}}[0]$, $h_{\text{FIR}}[7]$ ja $h_{\text{FIR}}[2007]$.

Window	$w[n]$, $-M \leq n \leq M$	Mininum stopband attenuation	Length of transition band $\Delta\omega$
Blackman	$0.42 + 0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M}) + 0.08\cos(\frac{4\pi n}{2M})$	75.3 dB	$5.56\pi/M$

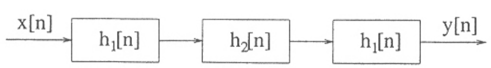
Taulukko 1: Tehtävä 3: Blackman-ikkunafunktion ominaisuuksia.

4) (**VAIN TENTTI**, 6p) Tutkitaan kolmen LTI-järjestelmän sarjaankytkentää kuvassa 4. Tiedetään, että $h_1[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2]$ ja koko kaskaadijärjestelmä $h[n] = 2\delta[n] - 5\delta[n-1] + 5\delta[n-2] - 3\delta[n-3] + \delta[n-4]$.

a) Mikä on suotimen $h_2[n]$ impulssivaste? Muista näyttää tarvittavat välivaiheet!

b) Piirrä $h_1[n]$:n ja $h_2[n]$:n napanollakuviot sekä hahmottele niiden amplitudivasteet $|H_i(e^{j\omega})|$.

c) Mitä voit sanoa järjestelmien $h_1[n]$, $h_2[n]$ ja $h[n]$ stabiiliudesta ja kausaalisuudesta näiden ominaisuuksien määritelmiin perustuen? Osoita.



Kuva 4: Tehtävän 4 kaskaadikytkentä.

5) (**VAIN TENTTI**, 14 x 1p, max 12 p) Monivalinta. Väittämissä on 1-4 oikeaa vastausta, mutta valitse **yksi ja vain yksi.** Täytä **erillisille lomakkeelle**, johon rastita myös, teetkö välikokeen vai tentin.

Oikea valinta +1 p, väärä valinta -0.5 p, ei valintaa 0 p. Perusteluja ei tarvita. Vastaa niin moneen kuin haluat. Tehtävän maksimipistemäärä on 12 ja minimimäärä 0.

5.1 Tutkitaan diskreettiaikaista järjestelmää $y[n] = 4x[3n+2] + 1$:
- (A) se on lineaarinen
- (B) se on aikainvariantti
- (C) se on kausaalinen
- (D) mikään ylläolevista ei ole oikein

5.2 Sekvenssin $x[n] = \cos(\pi n/3) + 2\sin(0.25\pi n) - \sin(2\pi n/16)$ perusjakso N_0:
- (A) $N_0 = 2$
- (B) $N_0 = 6$
- (C) $N_0 = 48$
- (D) $N_0 = 768$

5.3 Sekvenssi $x[n] = \cos(0.25\pi n^2)$
- (A) ei ole jaksollinen
- (B) on jaksollinen, mutta perusjakson pituus on ∞
- (C) perusjakso $N_0 = 8$
- (D) mikään ylläolevista ei ole oikein

5.4 Mikä on kausaalisen ja stabiilin siirtofunktion $H(z) = \frac{1-z^{-2}}{1+0.5z^{-1}}$ käänteismuunnoksen $h[n]$ arvo kohdassa $n = 3$ kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella?
- (A) $h[3] = -0.952$
- (B) $h[3] = -0.375$
- (C) $h[3] = 0.375$
- (D) $h[3] = 0.952$

5.5 Katso jatkuva-aikaisen reaalisen signaalin spektriä $|X(j\Omega)|$ kuvan 5 ylärivillä. Näytteistetään taajuudella $f_T = 10$ kHz. Sekvenssin $x[n]$ spektri on kuvan 5 alarivin
- (A) (a)
- (B) (b)
- (C) (c)
- (D) (d)

5.6 Jotta signaali ei vierastu (aliasing) näytteistyksessä, näytteenottovälin T_s tulee olla
- (A) vähintään kymmenen kertaa niin suuri kuin signaalin korkeimman taajuuden taajuus
- (B) vähintään kaksi kertaa niin pitkä kuin signaalin korkeimman taajuuden perusjakson T_0
- (C) enintään puolet signaalin korkeimman taajuuden perusjaksosta T_0
- (D) mikään ylläolevista ei ole oikein

5.7 LTI-suotimen $H(z)$ napanollakuvio kuvassa 6(a) vastaa parhaiten magnitudivastetta
- (A) kuvassa 7(a)
- (B) kuvassa 7(b)
- (C) kuvassa 7(c)
- (D) kuvassa 7(d)

5.8 LTI-suotimen $H(z)$ magnitudivaste kuvassa 6(b) vastaa parhaiten napanollakuviota
- (A) kuvassa 8(a)
- (B) kuvassa 8(b)
- (C) kuvassa 8(c)
- (D) kuvassa 8(d)

5.9 Suotimen taajuusvaste on $H(e^{j\omega}) = 1 + 0.1e^{-8j\omega}$
- (A) impulssivaste on 8 merkkiä pitkä
- (B) suotimen nollat ovat tasavälisesti samalla ympyrän kaarella
- (C) vaihevaste on lineaarinen
- (D) suotimen asteluku on 2

5.10 Tutkitaan siirtofunktiota $H(z) = 1/(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})$. Valitsemalla suppenemisalue (ROC, "region of convergence")
- (A) $|z| < 2$ saadaan stabiili suodin $h[n]$
- (B) $|z| < 3$ saadaan stabiili suodin $h[n]$
- (C) $|z| > 3$ saadaan stabiili suodin $h[n]$, joka on myös kausaalinen
- (D) tavalla tai toisella – suotimesta ei saada samalla kausaalista ja stabiilia

5.11 Erään (monotonisen) ylipäästösuotimen siirtofunktio on $H(z) = K \cdot (1 - 2z^{-1} + z^{-2})$. Jotta suotimen maksimi on skaalattu ykköseksi, niin kerroin K pitää olla
- (A) $K = 0.5$
- (B) $K = 1$
- (C) $K = 2$
- (D) mikään ylläolevista ei ole oikein

5.12 Diskreetti Fourier-muunnos (DFT) voidaan laskea tehokkaasti hyödyntäen muunnosten symmetrisyysominaisuuksia.

Kuvassa 3 on erään FFT-algoritmin, "radix-2 DIT FFT with modified butterfly computational module" algoritmin laskennan kaaviokuva, kun muunnettavan sekvenssin pituus on $N = 128$. Ns. perhosyhtälöt ovat:

$$
\begin{aligned}
\Psi_{r+1}[\alpha] &= \Psi_r[\alpha] + W_N^l \Psi_r[\beta] \\
\Psi_{r+1}[\beta] &= \Psi_r[\alpha] - W_N^l \Psi_r[\beta]
\end{aligned}
$$

jossa $W_N = e^{-j2\pi/N}$.

Kun muunnettavana sekvenssinä on $x[n] = \{\underline{0}, 1, 2, 3, \ldots, 127\} = n$, niin mitä voidaan sanoa termistä $\Psi_3[73]$?
- (A) $\Psi_3[73] = -1 + j$
- (B) $\Psi_3[73] = -64 + 64j$
- (C) $\Psi_3[73] = -64 - 64j$
- (D) $\Psi_3[73] = -73 + 105j$

5.13 Tarkastellaan samaa rakennetta ja sekvenssiä kuin väittämässä 5.12. Laske summa $S = \Psi_6[0] + \Psi_6[32] + \Psi_6[64] + \Psi_6[96]$.
- (A) $S = 6$
- (B) $S = 192$
- (C) $S = 8128$
- (D) mikään ylläolevista ei ole oikein

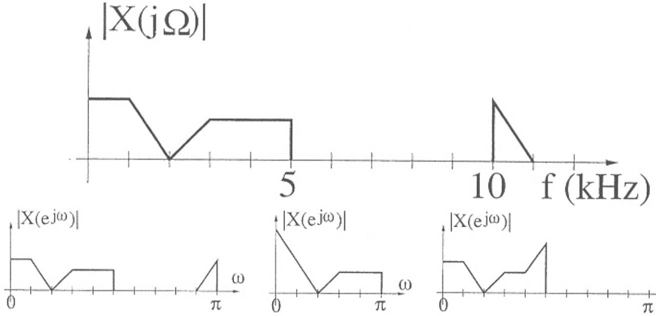
5.14 Digitaalisen sekvenssin näytteenottotaajuutta halutaan nostaa (7/5)-osaan alkuperäisestä. Kun käytössä on sopivat "anti-alias" ja "anti-imaging" suotimet $H_i(z)$, niin mikä järjestely tuottaa oikean lopputuloksen?

(A) $x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow y[n]$

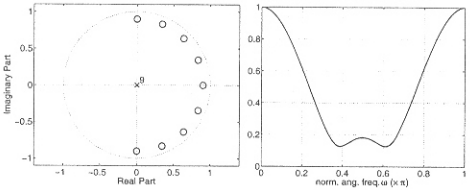
(B) $x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow y[n]$

(C) $x[n] \rightarrow \boxed{H_D(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow y[n]$

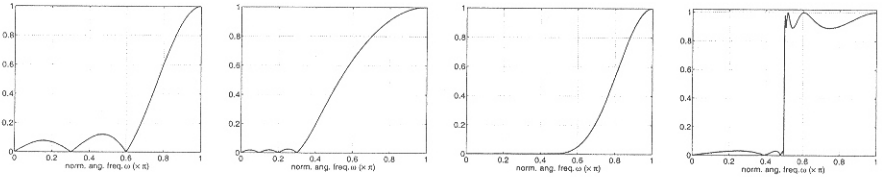
(D) $x[n] \rightarrow \boxed{H_I(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow y[n]$



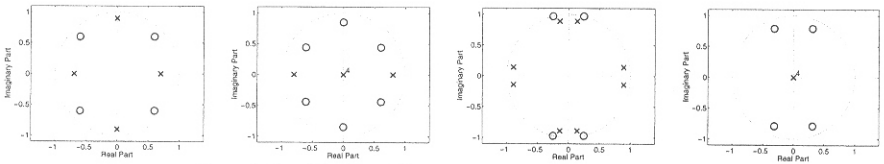
Kuva 5: Monivalintatehtävän 5.5 kuvia. Ylärivi: jatkuva $X(j\Omega)$, alarivi: vaihtoehdot **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)**



Kuva 6: (a) ja (b): Monivalintatehtävien 5.7 ja 5.8 kuvia.



Kuva 7: (a), (b), (c) ja (d): Monivalintatehtävien 5.7 kuvia.



Kuva 8: (a), (b), (c) ja (d): Monivalintatehtävien 5.8 kuvia.

T-61.3010 DSP Table of formulas, spring 2007

Disclaimer! Notations, e.g. ω or Ω, may vary from book to book, or from exam paper to other.

Even and odd functions:

$\mathcal{E}ven\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)]$

$\mathcal{O}dd\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)]$

Roots of second-order polynomial:

$ax^2 + bx + c = 0$

$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$

Logarithms:

$\log((A \cdot B/C)^D) = D \cdot (\log A + \log B - \log C)$

$\log_a b = \log_c b / \log_c a$

decibels: $10\log_{10}(B/B_0)$, $20\log_{10}(A/A_0)$

$10\log_{10}(0.5) \approx -3.01$ dB, $20\log_{10}(0.5) \approx -6.02$ dB

$20\log_{10}(0.1) = -20$ dB, $20\log_{10}(0.01) = -40$ dB

Complex numbers, unit circle:

$i \equiv j = \sqrt{-1} = -1/j$

$z = x + jy = r\,e^{j\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arctan(y/x) + n\pi,\ (n = 0, if x > 0, n = 1, if x < 0)$

$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)$

$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ (Euler's)

$\cos(\theta) = (1/2)\cdot(e^{j\theta} + e^{-j\theta}),\ \sin(\theta) = (1/2j)\cdot(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)},\ z_1/z_2 = (r_1/r_2)e^{j(\theta_1-\theta_2)}$

$z^n = r^n e^{jn\theta} = r^n(\cos\theta + j\sin\theta)^n = r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta)$

$\sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{r\,e^{j\theta}} = |\sqrt[N]{r}|\,e^{j(\theta+2\pi k)/N},\ k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

Trigonometric functions:

$1° = \pi/180$ radians ≈ 0.01745 rad, 1 rad $= 180°/\pi \approx 57.30°$

$\mathrm{sinc}(\theta) = \sin(\pi\theta)/(\pi\theta)$

$\sin(\theta)/\theta \to 1$, when $\theta \to 0$; $\mathrm{sinc}(\theta) \to 1$, when $\theta \to 0$

$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ (Taylor)

$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ (Taylor)

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(\theta)$	0	0.5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5
θ	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$-\pi/2$
$\sin(\theta)$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1
$\cos(\theta)$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0

$\pi \approx 3.1416$, $\sqrt{3}/2 \approx 0.8660$, $\sqrt{2}/2 \approx 0.7071$

Geometric series:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},\quad |a| < 1$

$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a},\quad |a| < 1$

Continuous-time unit step and unit impulse fun.:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$\delta_\Delta(t) = \frac{d}{dt}\mu_\Delta(t),\quad \delta(t) = \lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$ (Dirac's delta)

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1$

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)x(t)\,dt = x(t_0)$

In DSP notation $2\pi\delta(t)$ is computed $2\pi\int\delta(t)\cdot 1\,dt = 2\pi$, when $t = 0$, and $= 0$ elsewhere.

Discrete-time unit impulse and unit step functions:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Convolution

Convolution is commutative, associative and distributive.

$y(t) = h(t) \circledast x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$

$= h[n] \circledast x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$

$y_C[n] = h[n] Ⓝ x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[< n-k >_N]$

Correlation:

$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n-l] = x[l] \circledast y[-l]$

$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]x[n-l]$

Mean and variance of random signal:

$m_X = \mathrm{E}[X] = \int x p_X(x)dx$

$\sigma_X^2 = \int (x - m_X)^2 p_X(x)dx = \mathrm{E}[X^2] - m_X^2$

Frequencies, angular frequencies, periods:

Here f_s (also f_T later) is the sampling frequency

Frequency f, $[f] = \mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$

Angular frequency $\Omega = 2\pi f = 2\pi/T$, $[\Omega] = \mathrm{rad/s}$

Normalized angular frequency

$\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_s$, $[\omega] = $ rad/sample

Normalized frequency in Matlab

$f_{MATLAB} = 2f/f_s$, $[f_{MATLAB}] = 1/$sample

Integral transform properties

Here all integral transforms share some basic properties. Examples given with CTFT, $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, $x_1[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega})$, and $x_2[n] \leftrightarrow X_2(e^{j\omega})$ are time-domain signals with corresponding transform-domain spectra. a and b are constants.

Linearity. All transforms are linear.

$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$

Time-shifting. There is a kernel term in transform, e.g.,

$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}X(e^{j\omega})$

Frequency-shifting. There is a kernel term in signal e.g.,

$e^{j\omega_k n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_k)})$

Conjugate symmetry.

$x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

If $x[n] \in \mathbb{R}$, then

$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$

$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

If $x[n] \in \mathbb{R}$ and even, then $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ and even.

If $x[n] \in \mathbb{R}$ and odd, then $X(e^{j\omega})$ purely $\in \mathbb{C}$ and odd.

Time reversal. Transform variable is reversed, e.g.,

$x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

Differentiation. In time and frequency domain, e.g.,

$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

$nx[n] \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$

Duality. Convolution property: convolution in time domain corresponds multiplication in transform domain

$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$

and multiplication property: vice versa

$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$

Parseval's relation. Energy in signal and spectral components:

$\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$

Integral transforms

Definitions given in first two lines of each type. Some common pairs as well as properties are listed. See math reference book for complete tables.

Fourier-series of continuous-time periodic signals:

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,e^{jk\Omega_0 t}$

$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\Omega_0 t}\,dt$

$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{jk\Omega_0 t_0}$

$e^{jM\Omega_0 t}x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$

$\int_T x_a(\tau)x_b(t-\tau)\,d\tau \leftrightarrow Ta_k b_k$

$x_a(t)x_b(t) \leftrightarrow \sum_l a_l b_{k-l}$

$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow jk\Omega_0 a_k$

Fourier-series of discrete-time periodic sequences:

$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\,e^{jk\omega_0 n}$, $x[n]$ periodic with N_0

$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\,e^{-jk\omega_0 n}$, a_k periodic with N_0

$x[n - M] \leftrightarrow a_k e^{jk\omega_0 M}$

$e^{jM\omega_0 n}x[n] \leftrightarrow a_{k-M}$

Continuous-time Fourier-transform (CTFT):

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\,e^{j\Omega t}\,d\Omega$

$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt$

$x(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}X(j\Omega)$

$e^{j\Omega_k t}x(t) \leftrightarrow X(j(\Omega - \Omega_k))$

$x_a(t) \circledast x_b(t) \leftrightarrow X_a(j\Omega)X_b(j\Omega)$

$x_a(t)x_b(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega) \circledast X_b(j\Omega)$

$\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow j\Omega X(j\Omega)$

$tx(t) \leftrightarrow j\frac{d}{d\Omega}X(j\Omega)$

$e^{j\Omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$

$\cos(\Omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$

$\sin(\Omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$

$x(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \leftrightarrow X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\delta(t - t_k) \leftrightarrow e^{j\Omega t_k}$

$e^{-at}\mu(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}$, where $\mathcal{R}eal\{a\} > 0$

Discrete-time Fourier-transform (DTFT):

$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\,d\omega$

$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-j\omega n}$, $X(e^{j\omega})$ periodic 2π

$x[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}X(e^{j\omega})$

$e^{j\omega_k n}x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_k)})$

$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$

$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$

$nx[n] \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$

$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\sum_l \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$

$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi\sum_l[\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$

$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow j\pi\sum_l[\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)]$

$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi\sum_l \delta(\omega - 2\pi l)$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N_1 + 0.5))}{\sin(\omega/2)}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$\delta[n] \leftrightarrow 1$

$\delta[n-k] \leftrightarrow e^{-jk\omega}$

$a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}},\quad |a| < 1$

***N*-point Discrete Fourier-transform (DFT):**

Connection to DTFT: $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$

$W_N = e^{-j2\pi/N}$

$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn},\quad 0 \leq n \leq N-1$

$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn},\quad 0 \leq k \leq N-1$

$x[< n - n_0 >_N] \leftrightarrow W_N^{kn_0}X[k]$

$W_N^{-nk_0}x[n] \leftrightarrow X[< k - k_0 >_N]$

$y_C[n] = h[n] Ⓝ x[n] \leftrightarrow H[k] \cdot X[k] = Y[k]$

Laplace transform:

Convergence with a certain ROC (region of convergence).

Connection to continuous-time Fourier-transform: $s = j\Omega$

$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$

$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$

***z*-transform:**

Convergence with a certain ROC (region of convergence).

Connection to discrete-time Fourier-transform: $z = e^{j\omega}$

$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$ C in ROC of $X(z)$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

$x[n-k] \leftrightarrow z^{-k}X(z)$

$x_1[n] \circledast x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$

$\delta[n] \leftrightarrow 1$, ROC all z

$\delta[n-k] \leftrightarrow z^{-k}$, all z, except 0 ($k > 0$) or ∞ ($k < 0$)

$\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z| > 1$

$-\mu[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z| < 1$

$a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z| > |a|$

$na^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},\quad |z| > |a|$

$(n+1)a^n\mu[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2},\quad |z| > |a|$

$r^n\cos(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{1 - r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}},\quad |z| > |r|$

$r^n\sin(\omega_0 n)\mu[n] \leftrightarrow \frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2r\cos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}},\quad |z| > |r|$

LTI filter analysis

Stability $\sum_n |h[n]| < \infty$; unit cirle belongs to ROC

Causality $h[n] = 0, n < 0$; ∞ belongs to ROC

Unit step response $s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$

Causal transfer function of order $\max\{M, N\}$:

$H(z) = B(z)/A(z) = K \cdot \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} = G \cdot \frac{\prod_{m=1}^{M}(1 - d_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^{N}(1 - p_n z^{-1})}$

Zeros d_m: $B(z) = 0$; *Poles* p_n: $A(z) = 0$

Frequency, magnitude/amplitude, phase response, $z \leftarrow e^{j\omega}$

$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|\,e^{j\angle H(e^{j\omega})}$

$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

$H[k] = H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$

Group delay $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega})$

Important *transform pairs and properties:*

$a\,\delta[n-k] \leftrightarrow a\,e^{-jk\omega} \leftrightarrow a\,z^{-k}$

$a^n\mu[n] \leftrightarrow 1/[1 - a\,e^{-j\omega}] \leftrightarrow 1/[1 - a\,z^{-1}]$

$h[n] = \sum_i\big(k_i \cdot a_i^n\mu[n]\big) \leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \ldots$

$\ldots\sum_i\big(k_i/[1 - a_i\,e^{-j\omega}]\big) \leftrightarrow H(z) = \sum_i\big(k_i/[1 - a_i\,z^{-1}]\big)$

$a\,x[n-k] \leftrightarrow a\,e^{-jk\omega}X(e^{j\omega}) \leftrightarrow a\,z^{-k}X(z)$

$y[n] = h[n] \circledast x[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$

rectangular $\leftrightarrow$ sinc, sinc $\leftrightarrow$ rectangular

LTI filter design (synthesis)

Bilinear transform $H(z) = H(s)|_s$ and *prewarping*

$s = k \cdot (1 - z^{-1})/(1 + z^{-1}),\qquad k = 1$ or $k = 2/T = 2f_T$

$\Omega_{prewarp,c} = k \cdot \tan(\omega_c/2),\qquad k = 1$ or $k = 2/T = 2f_T$

Spectral transformations, $\hat{\omega}_c$ desired cut-off

LP-LP $z^{-1} = (\hat{z}^{-1} - \alpha)/(1 - \alpha\hat{z}^{-1})$, where

$\alpha = \sin(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c))/\sin(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c))$

LP-HP $z^{-1} = -(\hat{z}^{-1} + \alpha)/(1 + \alpha\hat{z}^{-1})$, where

$\alpha = -\cos(0.5(\omega_c + \hat{\omega}_c))/\cos(0.5(\omega_c - \hat{\omega}_c))$

Windowed Fourier series method

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases} \leftrightarrow h[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)$$

$h_{FIR}[n] = h_{ideal}[n] \cdot w[n]$

$H_{FIR}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{ideal}(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$

Fixed window functions, order $N = 2M$, $-M \leq n \leq M$:

Rectangular $w[n] = 1$

Hamming $w[n] = 0.54 + 0.46\cos((2\pi n)/(2M))$

Hann $w[n] = 0.5 \cdot (1 + \cos((2\pi n)/(2M)))$

Blackman $w[n] = 0.42 + 0.5\cos(\frac{2\pi n}{2M}) + 0.08\cos(\frac{4\pi n}{2M})$

Bartlett $w[n] = 1 - (|n|/M)$

Multirate systems

Upsampling (interpolation) with factor L, $\boxed{\uparrow L}$

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ x_u[n] = 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$X_u(z) = X(z^L)$, $X_u(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$

Downsampling (decimation) with factor M, $\boxed{\downarrow M}$

$x_d[n] = x[nM]$

$X_d(z) = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M}W_M^{-k})$,

$X_d(e^{j\omega}) = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi k)/M})$