Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu
Somersalo/Dahl/Pursiainen

Mat-1.1220 Matematiikan peruskurssi S2

1. välikoe 19.02.2006

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa on laskimen käyttö sallittu

1. Tutki, suppenevatko sarjat

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

   Suppenevatko sarjat itseisesti? Perustele huolellisesti.

2. Olkoon tasokäyrä annettu parametrimuodossa

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + 1\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}.$$

   (a) Laske kaarenpituus, kun $0 \leq t \leq 1$.

   (b) Parametrsoi käyrä kaarenpituuden avulla.

3. Laske pisteen $(1, 0, -1)$ etäisyys suorasta, joka kulkee pisteiden $(1, -2, 0)$ ja $(3, 0, 1)$ kautta.

4. Laske parametrisoidun käyrän

$$\mathbf{r}(s) = 3\cos\frac{s}{5}\mathbf{i} + 3\sin\frac{s}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}s\mathbf{k}$$

   tangentti- ja normaalivektorit $\widehat{\mathbf{T}}$, $\widehat{\mathbf{N}}$ sekä kaarevuus ja kaarevuussäde. Mikä on käyrän oskuloivan tason yhtälö, kun $s = 0$?

1 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ on - positiivinen
- jatkuva kun $n \geq N$
- vähenevä

=> integraalitestillä

$$\int_N^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\,dn < \int_N^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}\,dn$$ suppenee (itseisesti)

b)
Suhdetestillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} \to \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n} = \frac{2}{(2n+2)(2n+1)} \to 0$$

suppenee itseisesti

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\{a_n\}$ on:
- positiivinen
- vähenevä
- lähestyy nollaa

=> sarja suppenee (ei itseisesti)

koska alternoiva

2

$\bar{r}(t) = \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 + 1\right)\hat{\imath} + \frac{1}{2} \cdot t^2 \hat{\jmath}$ $\quad \bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{3t^2}{3}\hat{\imath} + \frac{2}{2}t\,\hat{\jmath}$

a.

Kaarenpituus välillä $t \in [0,1]$: $\boxed{s = \int_0^1 \left|\frac{d\bar{r}(t)}{dt}\right| dt} = \int_0^1 \sqrt{(t^2)^2 + t^2}\, dt$

$s = \int_0^1 t\sqrt{t^2+1} \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right) dt \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \Big/_0^1 (t^2+1)^{3/2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^{3/2} - 1}{3}$

$s = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$

Oikea kaava/menetelmä	~ 2 p
Oikea vastaus	~ 1 p

b.

$S(t) = \int_0^t \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt = \int_0^t 2t\,(t^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2}\, dt \cdot \frac{1}{3} = \Big/_0^t (t^2+1)^{3/2} \cdot \frac{1}{3}$

Kaarenpituutta mitataan välillä $[0, t]$

Kaarenpituus $s = (t^2+1)^{3/2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ $\quad \boxed{\text{IDEA} \sim 2\text{p}}$

Ratkaistaan t: $\left(s + \frac{1}{3}\right) \cdot 3 = (t^2+1)^{3/2} \mapsto t^2 + 1 = (3s+1)^{\frac{2}{3}}$

$$\begin{cases} t^2 = (3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1 \longrightarrow t = \pm\left((3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \\ t^3 = \pm\left((3s+1)^{2/3} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

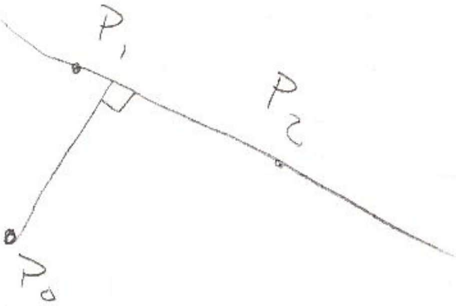
Parametrisointi kaarenpituuden avulla

$$\bar{r}(s) = \left(\frac{1}{3}\left[\pm(3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1\right]^{\frac{3}{2}} + 1\right) \cdot \hat{\imath} + \frac{1}{2} \cdot \left[(3s+1)^{\frac{2}{3}} - 1\right]\hat{\jmath}$$

$(\sim 1\text{p})$

(3)

Suora: $r(t) = i - 2j + t(2i + 2j + k)$



$$s = \frac{|(r_0 - r_1) \times v|}{|v|}$$

$$= \frac{|(i - k - (i - 2j)) \times (2i + 2j + k)|}{|v|}$$

$$= \frac{|(2j - k) \times (2i + 2j + k)|}{|v|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+4+1}}$$

$$= \frac{|i(2+2) - 2j - 4\hat{k}|}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{16 + 4 + 16}}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

4) Parametrisoitu käyrä $\bar{r}(s) = 3\cos\frac{s}{5}\hat{\imath} + 3\sin\frac{s}{5}\hat{\jmath} + \frac{4}{5}s\hat{k}$

s on kaarenpituus

$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$; $|\bar{v}| = \frac{ds}{dt}$

$\hat{T} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

Oskuloivan tason virittävät $\hat{T}$ ja $\hat{N}$

$\boxed{\hat{T} = \frac{d\bar{r}}{ds}}$ $\boxed{\hat{N} = \frac{d\hat{T}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|}$

Kaarevuus $\kappa = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$

Kaarevuussäde $\rho = \frac{1}{\kappa}$

[OIKEIN MUODOSTETUT KAAVAT ~ 3p]

$\hat{T} = \frac{d\bar{r}}{ds} = 3\left(-\sin\frac{s}{5}\right)\cdot\frac{1}{5}\hat{\imath} + 3\cdot\cos\left(\frac{s}{5}\right)\cdot\frac{1}{5}\cdot\hat{\jmath} + \frac{4}{5}\cdot\hat{k}$

$\hat{T}(s) = -\frac{3}{5}\cdot\sin\frac{s}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}\hat{\jmath} + \frac{4}{5}\hat{k}$

$\otimes$ $\frac{d\hat{T}}{ds} = -\frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}\cdot\frac{1}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\left(-\sin\frac{s}{5}\right)\cdot\frac{1}{5}\hat{\jmath}$ $\boxed{\otimes \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{3}{25}}$

$\hat{N}(s) = -\cos\frac{s}{5}\hat{\imath} - \sin\frac{s}{5}\hat{\jmath}$

$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \frac{3}{25}$ on kaarevuus; $\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{25}{3}$ kaarevuussäde

---

Oskuloivan tason normaali $\hat{n} = \hat{T} \times \hat{N}$

$\hat{n}(s=0) = \left(\frac{3}{5}\hat{\jmath} + \frac{4}{5}\hat{k}\right) \times \left(-\hat{\imath}\right) = \frac{3}{5}\hat{k} - \frac{4}{5}\cdot\hat{\jmath}$

$= c\hat{k} + b\hat{\jmath} + a\hat{\imath}$

TASO $ax + by + cz = d$ vrt. $\circ$

OSKULOIVA TASO $(s=0)$: $\boxed{-\frac{4}{5}y + \frac{3}{5}z = d = 0}$

TASON PISTE $(x,y,z) = (3,0,0)$

$\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

$\begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$

[OIKEAT VASTAUKSET ~ 3p]