

**Huom! Tentti suorituksen arvostelemisen edellyttää, että kaikki kolme kotitehtävää ovat hyväksyttyi suoritetut ennen tenttiä.**

**Tehtävä 1 (10p)**

- (a) Määrittele seuraavat käsitteet: *hylkäminen resoluutiolla, vapaa muuttujaesiintymä ja erojoukko.* ( $3 \times 2p$ )
- (b) Mitä tarkoitetaan merkinnällä  $\Sigma \models \phi$ ?

Osoita yksityiskohtaisesti, että jos  $\Sigma \cup \{\phi\} \models \psi$ , niin  $\Sigma \models \phi \rightarrow \psi$ . ( $4p$ )

**Tehtävä 2 (10p)** Todista semanttisilla tauluilla seuraavat väittämät:

- (a)  $\models (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge (\neg C \rightarrow A)$
- (b)  $\models \exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

Semanttisten taulujen tulee sisältää kaikki välivaiheet !!!

**Tehtävä 3 (10p)** Johda lauseelle

$$\neg(\exists x \forall y G(y, x) \rightarrow \forall y \exists x G(x, y))$$

Prenex-normaalimuoto sekä mahdollisimman yksinkertainen klausuulimuoto (eli klausuulijoukko  $S$ ) ja osoita  $S$  toteutumattomaksi resoluutiolla.

**Tehtävä 4 (10p)** Tarkastellaan kirjahyllyn sisältöä, joka on kuvattu kaksipaikkaisen predikaatin  $P(x, y) =$  "kirjat  $x$  ja  $y$  sijaitsevat hyllyssä välittömästi peräkkäin". Viitatkoon vakiot  $b, c$  ja  $d$  tiettyihin Böllin, Carrin ja Dostoevskin teoksiin.

- (a) Määrittele kolmipaikkainen predikaatti  $V(x, y, z) =$  "kirja  $y$  sijaitsee hyllyssä kirjan  $x$  jälkeen mutta ennen kirja  $z$  eli  $x:n$  ja  $z:n$  välissä" predikaattilogiikalla siten, että määritelmäsi kattaa kaikki yksittäisessä hyllyllä olevat kirjat.
- (b) Anna laatimallesi määritelmälle  $\Sigma$  malli  $S \models \Sigma$ , jonka perusteella

$$\Sigma \cup \{P(b, c), P(c, d)\} \not\models V(d, c, b).$$

**Tehtävä 5 (10p)**

Selitä, kuinka ehtolauseelle

`if (B) then {C1} else {C2}`

voidaan muodostaa *heikoin esiehto*  $B_1$  annetusta jälkiehdosta  $B_2$ .

Tarkastellaan seuraavaa ohjelmaa Divide:

`v=0 ; z=x ; while(z>y) { z=z-y ; v=v+1 }.`

Osoita heikoimpia esiehtoja ja sopivaa invariantia käyttäen, että

$$\models_p [\text{true}] \text{ Divide } [v == x / y],$$

missä  $x / y$  on osamääränsä kokonaisosa jaettaessa  $x$   $y$ :llä.

---

Vastauspaperissa tulee olla kurssin nimi, koodi ja tenttipäivämäärä, sekä nimi, koulutusohjelma, vuosikurssi, opintokirjan numero ja omakäytinen allekirjoitus.

**Kurssipalaute:** <http://www.tcs.hut.fi/Studies/T-79.3001>  
**Muista myös viimeinen ajankäyttökyysel!**

Please note the following: your answers will be graded only if you have passed all the three home assignments before the exam!

**Assignment 1** (10p)

- (a) Define the following concepts: *refutation by resolution*, *free variable occurrence*, and *disagreement set*. ( $3 \times 2p$ )

- (b) What is meant by the notation  $\Sigma \models \phi$ ?

Prove in detail that if  $\Sigma \cup \{\phi\} \models \psi$ , then  $\Sigma \models \phi \rightarrow \psi$ .

**Assignment 2** (10p) Prove the following claims using semantic tableaux:

- (a)  $\models (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B) \wedge (\neg C \rightarrow A)$
- (b)  $\models \exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

Tableau proofs must contain all intermediary steps !!!

**Assignment 3** (10p) Derive a Prenex normal form and a clausal form (i.e. a set of clauses  $S$ ) for the sentence

$$\neg(\exists x \forall y G(y, x) \rightarrow \forall y \exists x G(x, y)).$$

Try to make  $S$  as simple as possible. Prove that  $S$  is unsatisfiable using resolution.

**Assignment 4** (10p) Let us consider the contents of a book shelf which is described using a binary predicate  $C(x, y)$  = “books  $x$  and  $y$  are located consecutively on the shelf”. Suppose that  $b$ ,  $c$  and  $d$  are three constants referring to specific books authored by Böll, Carr, and Dostojevski, respectively.

- (a) Define a ternary predicate  $B(x, y, z)$  = “book  $y$  appears between books  $x$  and  $z$ , i.e., after  $x$  but before  $z$  on the shelf” using predicate logic so that your definition covers all books on an individual shelf.
- (b) Give a model  $S \models \Sigma$  of your definition  $\Sigma$  on the basis of which it holds that

$$\Sigma \cup \{P(b, c), P(c, d)\} \not\models V(d, c, b).$$

**Assignment 5** (10p)

Explain how the *weakest precondition*  $B_1$  of an if-statement

$\text{if } (B) \text{ then } \{C_1\} \text{ else } \{C_2\}$

can be formed given a postcondition  $B_2$  for it.

Consider the following program Divide:

$v = 0 ; z = x ; \text{while}(z > y) \{ z = z - y ; v = v + 1 \}.$

Use weakest preconditions and a suitable invariant to establish

$\models_p [\text{true}] \text{ Divide } [v == x / y],$

where  $x / y$  denotes the integer quotient when  $x$  is divided by  $y$ .

---

The name of the course, the course code, the date, your name, your student id, and your signature must appear on every sheet of your answers.

**Feedback:** <http://www.tcs.hut.fi/Studies/T-79.3001/>  
**Please remember the last time tracking questionnaire!**