Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Lassas/Marola

Mat-1.423 Matematiikan peruskurssi L4

2. Välikoe 27.3.2007

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Laskimen käyttö on kielletty. Kääntöpuolella on kaavoja.

1. Osoita, että kun $\lambda < 0$ niin tehtävän

$$\begin{cases} -(u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)) = \lambda u(x,y)\,, & x \in (0,1)\,,\ y \in (0,1)\,, \\ u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,1) = 0 \end{cases}$$

ainoa ratkaisu on $u(x,y) = 0$.

2. Etsi muodollinen (sarjamuotoinen) ratkaisu lämpöyhtälölle

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\,, & x \in (0,1)\,,\ y \in (0,1)\,,\ t \geq 0\,, \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0\,, \\ u(x,y,0) = f(x,y). \end{cases}$$

3. Tarkastellaan aaltoyhtälöä

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2\, u_{xx}(x,t)\,, & x \in \mathbb{R}\,,\ t \geq 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,,\ u_t(x,0) = g(x)\,. \end{cases}$$

missä $c > 0$. Oletetaan, että $f(x) = 0$ ja $g(x) = 0$ kun $x \leq 0$. Missä pisteissä $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ratkaisu $u(x,t)$ voi olla nollasta poikkeava?

4. Olkoon $u(x,t)$ tehtävän

$$\begin{cases} u_t = u_{xxxx}\,, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ratkaisu. Osoita, että kaikilla $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

Vihje: Tarkastele, mikä funktion $f(x)$ Fourier-muunnos $\widehat{f}(\omega)$ on, kun $\omega = 0$.

Divergenssilause:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma\,.$$

Green 1:

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v\,\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \tfrac{\partial}{\partial\nu} u\, d\sigma\,.$$

Green 2:

$$\int_{\Omega} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\, \tfrac{\partial}{\partial\nu} u - u\, \tfrac{\partial}{\partial\nu} v)\, d\sigma\,.$$

Green 3:

$$\int_{\Omega} \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial}{\partial\nu} u\, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Fourier-muunnos ja -käänteismuunnos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx\,, \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Besselin funktio:

$$J_k(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-r^2/4)^j}{j!(j+k)!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Besselin yhtälö:

$$\rho^2 J_m''(\rho) + \rho J_m'(\rho) + (\rho^2 - m^2) J_m(\rho) = 0.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\phi}\, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\, u_{\phi}\,.$$

D'Alembertin kaava:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\, f(x+ct) + f(x-ct)\,] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds\,.$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mathbf{v}|\le 1} \frac{\tfrac{\partial}{\partial t}(t\, f(\mathbf{x} + ct\,\mathbf{v})) + t\, g(\mathbf{x} + ct\,\mathbf{v})}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2}}\, d\mathbf{v}\,.$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{v}|=1} \left[\, \tfrac{\partial}{\partial t} \left(\, t\, f(\mathbf{x} + ct\,\mathbf{v})\,\right) + t\, g(\mathbf{x} + ct\,\mathbf{v})\,\right] d\sigma_{\mathbf{v}}\,.$$

Kelvinin muunnos a-säteisen kiekon/pallon suhteen dimensiossa d:

$$v(\mathbf{y}) = \left(\frac{a}{|\mathbf{y}|}\right)^{d-2} u\left(\frac{a^2}{|\mathbf{y}|^2}\mathbf{y}\right).$$