

Tentti, 31.3.2007

Merkitse paperiin selvästi: C3-II, tentti, päivämäärä, nimi, osasto, opintokirjan numero ja allekirjoituksesi.

Kokeessa ei saa käyttää taulukoita eikä laskimia. Perustele vastauksesi!

Tehtävä 1. Mitä tekevät matriisit

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

tason vektoreille? Ovatko ne ortogonaalisia? Perustele miksi ovat tai eivät ole! Laske determinantit.

Tehtävä 2. Käännä Gauss-Jordanin eliminaatiolla matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 3. Ratkaise systeemi $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kun kerroinmatriisi on

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on dynamiikan tyyppi? Entä origon stabiilisuus/epästabiilisuus? Hahmottele muutamia ratkaisukäyriä ja merkitse virtaussuunta.

Tehtävä 4. Kirjoita epähomogeenisen tehtävän $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{k}$ yleinen ratkaisu matriisieksponentin avulla.

b. Ratkaise systeemi, jossa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Tehtävä 5. Ratkaise

$$\begin{cases} \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \delta(t - a) \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Laplace-muunnosta käyttäen.