

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!
Funktioalaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!*

1. Määritä funktion $f(x, y) = xy - y$ suurin arvo kun $x^2 + 3y^2 = 1$ käyttäen Lagrangen kertojaa. Mistä tiedetään, että suurin arvo todella löydetään tällä tavalla? (Perustele lyhyesti!)
2.
 - (a) Kirjoita integraali, joka saadaan kun integraalissa $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, missä $\Omega = \{(x, y) \mid |y| \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$, siirrytään käyttämään napakoordinaatteja. Integraalia ei tarvitse laskea.
 - (b) Määritä uudet integroimisrajat, kun integraalissa $\int_0^1 \int_0^{-\ln(y)} f(x, y) dx dy$ vaihdetaan integroimisjärjestys. Piirrä kuvio!
3. Laske käyräintegraali $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ missä $\mathbf{f}(x, y) = xy\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ ja C on jana pisteestä $(1, 1)$ pisteeseen $(0, -2)$. Onko odotettavissa, että saadaan sama tulos jos integroidaan pitkin jotain toista käyrää, jolla on alku- ja loppupisteinä myös $(1, 1)$ ja $(0, -2)$? (Perustele lyhyesti!)
4.
 - (a) Määritä funktion $\mathbf{f}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ divergenssi.
 - (b) Funktiosta \mathbf{g} tiedetään, että $\nabla \cdot \mathbf{g} = 0$, $\nabla \times \mathbf{g} = x\mathbf{i} - (y + z)\mathbf{k}$, $\mathbf{g}(0, y, z) = \mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j}$ ja $\mathbf{g}(1, y, z) = (y - z)\mathbf{k}$. Määritä pintaintegraali $\iint_P \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS$ missä P on sylinteripinta $\{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = 1, 0 \leq x \leq 1\}$ ja \mathbf{n} on normaali ”ulospäin”, soveltamalla divergenssilausesta joukossa $B = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.