Teknillinen korkeakoulu
Systeemianalyysin laboratorio
Sovellettu todennäköisyyslasku (Mat-2.091)
1. Välikoe, 5.3.2001,
Ratkaisut

1. Koska

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B), \tag{1}$$

niin saamme kohdassa (a) suoraan kaavaan (1) sijoittamalla, että

$$\Pr(A \cup B) = 0.8 + 0.4 - 0.1 = 1.1 > 1,$$

joka on ristiriita, sillä todennäköisyys on aina ≤ 1. Siis kohta (a) ei voi olla mahdollinen.

Jos taas A ja B ovat riippumattomia, niin tästä seuraa, että

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B).$$

Nyt siis saamme kaavaan (1) sijoittamalla, että

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

eli, että

$$\Pr(A \cup B) = 0.8 + 0.4 - 0.8 \cdot 0.4 = 0.88 < 1.$$

Siis oletus (b) mahdollistaa todennäköisyyden $\Pr(A \cup B)$.

Kohdassa (c) saamme, että $\Pr(A \cap B) = 0$, josta seuraa, että

$$\Pr(A \cup B) = 0.8 + 0.4 - 0 = 1.2 > 1,$$

joka on ristiriita, sillä todennäköisyys on aina ≤ 1. Siis myöskään kohta (c) ei voi olla mahdollinen.

Vastaus: Ainoastaan kohta (b) mahdollistaa todennäköisyyden $\Pr(A \cup B)$.

2. Tehtävä voidaan ratkaista esimerkiksi puumallia käyttämällä. Olkoon tapahtuma A = "Viimeinen nostettu kuula on musta". Tällöin saadaan, että

$$\Pr(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0.4.$$

Vastaus: Kysytty todennäköisyys on 0.4.

3. $Z \le z \iff X \le z$ ja $Y \le z$. Edelleen,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \Pr(Z \le z) \\ &= \Pr(X \le z \text{ ja } Y \le z) \\ &= \Pr(X \le z) \cdot \Pr(Y \le z) \qquad (\text{Koska } X \perp\!\!\!\perp Y) \\ &= F_X(z) \cdot F_Y(z) \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}. \end{aligned}$$

Nyt saadaan, että

$$f_Z(z) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}.$$

Ja lopulta saamme odotusarvon

$$\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

VASTAUS: Kysytty systeemin toiminta-ajan odotusarvo on $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

4. Koska Resistanssi $R \sim N(300, 20^2)$, niin todennäköisyys saada vastus, jonka resistanssi R on vaaditulla välillä saadaan laskemalla:

$$\begin{aligned} p &= \Phi(\frac{350-300}{20}) - \Phi(\frac{280-300}{20}) \\ &= \Phi(2.5) - (1 - \Phi(1)) \\ &= 0.994 + 0.841 - 1 \\ &= 0.835. \end{aligned}$$

Nyt niiden vastusten lukumäärä X, joiden resistanssi on vaaditulla välillä

$$X \sim \mathrm{Bin}(100, p).$$

Edelleen (De Moivre–Laplace-lauseesta) seuraa, että

$$X \sim_{\text{appr.}} \mathrm{N}(0.835, 3.72^2).$$

Saadaan siis, että

$$\Pr(X \le 80) = 1 - \Phi(\frac{80 - 83.5}{3.72}) = 1 - \Phi(-0.94) = \Phi(0.94) = 0.826.$$

VASTAUS: Todennäköisyys, että yritys saa vähintään 80 sellaista vastusta, joiden resistanssi on välillä 280 ja 350 ohmin välillä, on 0.826.