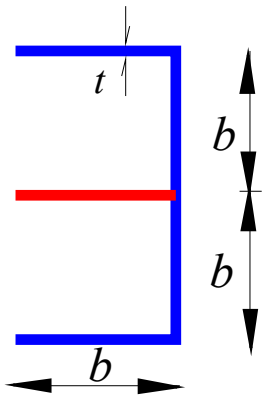
Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C, 4ov

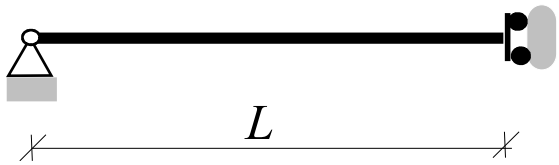
Tentti 14. 5. 2007

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- koko nimesi, puhuttelunimi alleviivattuna
- osasto, vuosikurssi, tentin päivämäärä sekä tentittävä opintojakso koodeineen
- opiskelijanumero (mukaan lukien tarkistuskirjain)
- monettako kertaa olet ko. opintojaksoa suorittamassa
- minä vuonna olet suorittanut pakolliset harjoitustehtävät

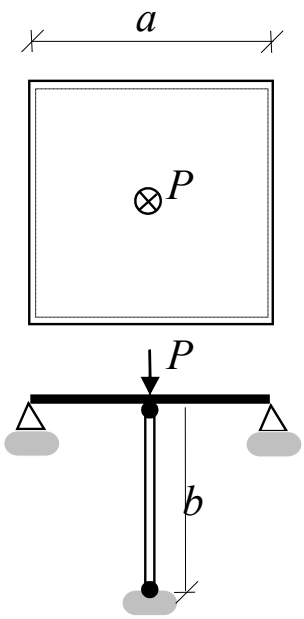


1) Selvitä, miten U-poikkileikkauksisessa sauvassa vääntökeskiön asema sekä vääntö- ja käyristymisjäyhyys I_t ja I_ω muuttuvat, kun uuman keskelle hitsataan kolmas identtinen laippa (t on vakio).

2) Johda jatkuvamassaisen sauvan taivutusvärähtelyn osittaisdifferentiaaliyhtälö ja määritä sitä soveltaen oheisen sauvan kolme alinta ominaisvärähdyslukua. Piirrä lisäksi näitä vastaavat värähdys-muodot. Sauvan pituus on L, taivutusjäykkyys EI ja massa pituusyksikköä kohden m.



1) Neliölaatta, jonka sivumitta on a, paksuus h ja taivutusjäykkyys $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$, on tuettu reunoiltaan vapaasti. Lisäksi se on tuettu keskipisteestään kimmoisella pilarilla, jonka pinta-ala on A, pituus b ja materiaalin kimmokerroin E. Laattaa kuormittaa pilarin kohdalla (keskipisteessä) pistekuorma P. Arvioi käyttämällä potentiaalienergian minimin periaatetta ja soveltuvaa taipuman yritefunktiota, kuinka suuri osa kuormasta jää pilarin kannettavaksi.



4) Suoran sauvan yleinen yksidimensioinen kinematiikka määritellään yhtälöllä $\mathbf{u}(s,y) = \sum_{i=0}^{N} y^i u_i(s)\mathbf{e}_s + \sum_{i=0}^{N} y^i v_i(s)\mathbf{e}_y$.

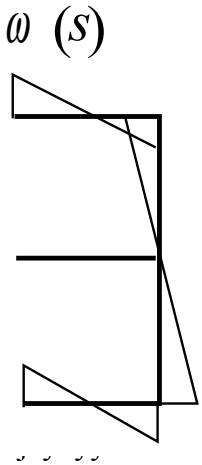
Miten tätä lauseketta tulee modifioida, jos

a) sauva otaksutaan kokoonpuristumattomaksi normaalin suunnassa,

b) sauvan poikkileikkaustasojen otaksutaan pysyvän tasoina,
c) sauvan akseli oletetaan venymättömäksi.
d) Jos b-kohdassa vielä lisäksi poikkileikkaustasojen otaksutaan pysyvän kohtisuorassa deformoitunutta sauvan akselia vastaan, osoita, että leikkausmuodonmuutoksia ei tällöin synny.

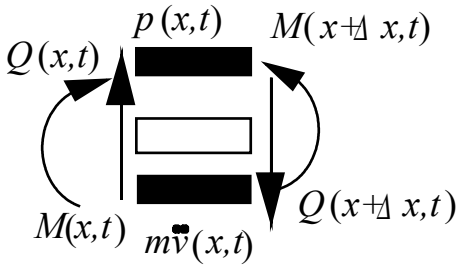
Rak-54.116 Rakenteiden mekaniikka C, RM C 4ov

Tentti 14. 5. 2007, Ratkaisut:



1. Leikkaus- eli vääntökeskiö sijaitsee symmetria-akselilla. Ko
ylimääräinen laippa on myös symmetria-akselilla, ei siihen s
mahdollinen leikkausjännitys aiheuta poikkileikkaukseen yli
vääntöä. Tästä johtuen vääntökeskiön asema **ei muutu**. Sym
poikkileikkausta kiertävän koordinaatin origo tulee valita my
symmetria-akselille, jolloin sektoriaalisen koordinaatin jakau
normeeratuksi ja häviää ylimääräisessä laippassa. Tästä seura
käyristymisjäyhyys I_ω **ei myöskään muutu**. Sen sijaan vää
I_t saa lisäyksen $\Delta I_t = \frac{1}{3}bt^3$.

2. Kirjoitetaan pystysuora voimatasapainoehto sek



$$Q(x+\Delta x,t) - Q(x,t) + p(x,t)\Delta x - m\ddot{v}(x,t)\Delta x =$$
$$M(x+\Delta x,t) - M(x,t) - Q(x)\Delta x + [p(x,t) - m\ddot{v}($$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}Q(x,t)}{\mathrm{d}x} + p(x,t) - m\ddot{v}(x,t) = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}M(x,t)}{\mathrm{d}x} + Q(x,t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad EIv''''(x,t) + m\ddot{v}(x,t) = p(x,t)$$

Tämän ratkaisua etsitään muodossa $v(x,t) = X(x)T(t)$, joka sijoittamalla yhtälöön antaa

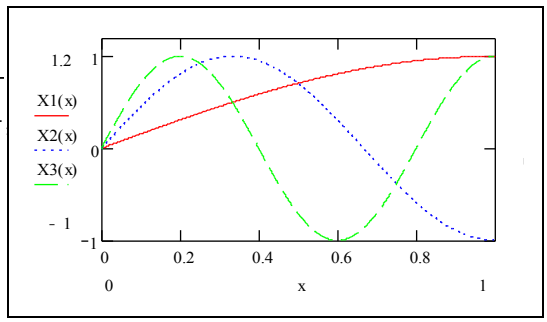
$$\frac{EI}{m}\frac{X''''}{X} = -\frac{\ddot{T}}{T} = \beta^2 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{T} + \beta^2 T = 0 & \Rightarrow \quad T(t) = C_1 \sin\beta t + C_2 \cos\beta t \\ X'''' - \dfrac{\beta^2 m}{EI} X = 0 & X(x) = D_1 \sin\gamma x + D_2 \cos\gamma x + D_3 \sinh\gamma x + D_4 \cosh\gamma x \end{cases}$$

missä $\gamma^4 = \beta^2 m/EI$. Reunaehdot ovat $X(0) = X''(0) = X'(L) = X'''(L) = 0$. Näistä saadaan ehdot $D_2 + D_4 = 0, -\gamma^2 D_2 + \gamma^2 D_4 = 0, \Rightarrow D_2 = D_4 = 0$, ja edelleen

$$\left.\begin{array}{l} D_1\gamma \cos\gamma L + D_3\gamma \cosh\gamma L = 0 \\ -D_1\gamma^3 \cos\gamma L + D_3\gamma^3 \cosh\gamma L = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma^4 \cos\gamma L \cosh\gamma L = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \Rightarrow$$

$$\beta = \omega = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

joten $\omega_1 = \frac{\pi^2}{4L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \omega_2 = \frac{9\pi^2}{4L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$



3. Käytetään laatan taipumalle kinemaattiset reunaehdot toteuttavaa approksimaatiota, esimerkiksi

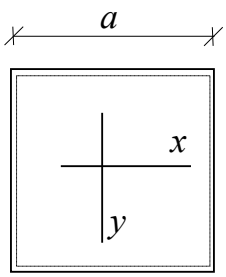
$w(x,y) = w_o \cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{a})$. Tällöin $\Delta w = w_{,xx} + w_{,yy} = -2(\frac{\pi}{a})^2 w_o \cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{a})$

Laatan muodonmuutosenergia on

$$U_{\text{laatta}} = \frac{D}{2}\iint_A (\Delta w)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2w_o^2 D(\frac{\pi}{a})^4 \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \cos^2(\frac{\pi x}{a})\cos^2(\frac{\pi y}{a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2w_o^2 D(\frac{\pi}{a})^4(\frac{a}{2})^2$$

Pilarin muodonmuutosenergia on

$$U_{\text{pilari}} = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon\,\mathrm{d}V = \frac{EA}{2}\int_0^b \varepsilon^2 \mathrm{d}x = \frac{EA}{2}\int_0^b \frac{w_o^2}{b^2}\mathrm{d}x = w_o^2\frac{EA}{2b}$$



Ulkoisen kuorman potentiaali on $V_P = -Pw_o$, ja kokonaispotentiaalienergian lauseke

$$\Pi = U_{\text{laatta}} + U_{\text{pilari}} + V_P = w_o^2\left(\frac{D}{2}\frac{\pi^4}{a^2} + \frac{EA}{2b}\right) - Pw_o.$$

Tämän minimi saavutetaan, kun

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial w_o}\delta w_o = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial w_o} = 0 \Rightarrow w_o\left(\frac{D\pi^4}{a^2} + \frac{EA}{b}\right) - P = 0 \Rightarrow w_o = \frac{Pa^2 b}{Db\pi^4 + EAa^2}.$$

Tällöin pilarille tulevan kuorman osuus on $X = \frac{EAa^2}{Db\pi^4 + EAa^2}P$.

4. Siirtymävektori on

$$\mathbf{u}(s,y) = \sum_{i=0}^{N} y^i u_i(s)\mathbf{e}_s + \sum_{i=0}^{N} y^i v_i(s)\mathbf{e}_y = \left(u_0(s) + yu_1(s) + y^2u_2(s) + \ldots\right)\mathbf{e}_s + \left(v_0(s) + yv_1(s) + y^2v_2(s) + \ldots\right)\mathbf{e}_y$$

a) $\varepsilon_y = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\cdot\mathbf{e}_y = 0 \Rightarrow \mathbf{u}(s,y) = \left(u_0(s) + yu_1(s) + y^2u_2(s) + \ldots\right)\mathbf{e}_s + v_0(s)\mathbf{e}_y$

$$= \sum_{i=0}^{N} y^i u_i(s)\mathbf{e}_s + v_0(s)\mathbf{e}_y$$

b) $\dfrac{\partial^n \mathbf{u}}{\partial y^n} \cdot \mathbf{e}_s = 0$, kun $n > 1$, $\Rightarrow \quad \mathbf{u}(s,y) = \left(u_0(s) + yu_1(s)\right)\mathbf{e}_s + v_0(s)\mathbf{e}_y$

c) $\varepsilon_s = \dfrac{\partial \mathbf{u}(s,0)}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_s = 0 \Rightarrow \quad \mathbf{u}(s,y) = yu_1(s)\mathbf{e}_s + v_0(s)\mathbf{e}_y$

d) $\mathbf{u}(s,y) = \left(u_0(s) - y\dfrac{\partial v_0(s)}{\partial s}\right)\mathbf{e}_s + v_0(s)\mathbf{e}_y \Rightarrow \gamma_{sy} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_s + \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_y = -\dfrac{\partial v_0(s)}{\partial s} + \dfrac{\partial v_0(s)}{\partial s} = 0$