Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Alestalo/Wallin

Mat-1.1230 Matematiikan peruskurssi S3

1. välikoe 16.10.2007

Vain funktiolaskimet ovat sallittuja.

1. Cauchy-Riemann-yhtälöiden napakoordinaattimuoto on

$$\begin{cases} U_r = \frac{1}{r} V_\theta \\ V_r = -\frac{1}{r} U_\theta. \end{cases}$$

Olkoon $U(r,\theta) = 2r\cos\theta + r\sin\theta$.
a) Määritä sellainen $V(r,\theta)$, että CR-yhtälöt toteutuvat.
b) Mikä on vastaavan analyyttisen funktion $f(z)$ lauseke?

2. a) Selitä Laurent-sarjan avulla, miksi funktion f residy yksinkertaisessa navassa z_0 on muotoa

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z).$$

b) Määritä funktion

$$f(z) = \frac{z}{3-z}$$

Taylor-sarja pisteen $z_0 = 1$ suhteen. Mikä on sarjan suppenemissäde?

3. Olkoon $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analyyttinen, $z_0 \in \mathbf{C}$ ja $r > 0$.
a) Parametrisoi z_0-keskinen r-säteinen ympyrä C ja laske sen avulla Cauchyn integraalikaavassa esiintyvä

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

b) Johda tuloksen avulla ns. keskiarvoperiaate

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt.$$

4. Laske residyjen avulla integraali

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\, dx.$$

Vihje: Integroi suorakulmaisen ympyräsektorin reunaa pitkin; sektorin kyljet ovat positiivisilla reaali- ja imaginaariakseleilla.