L1, s2007
Ensimmäisen välikokeen ratkaisuehdotuksia

Tehtävä 1
(a) $y' = -xy^2 = \frac{x}{-y^{-2}} =: \frac{f(x)}{g(y)}$, $y(0) = 2$. Separoituvan alkuarvotehtävän ratkaisukaavalla

$$\begin{aligned} \int_2^y -t^{-2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x t\,\mathrm{d}t \\ \Big|_2^y t^{-1} &= \Big|_0^x \frac{1}{2}t^2 \\ y^{-1} - 2^{-1} &= \frac{1}{2}x^2 - 0 \\ \Longrightarrow \qquad y(x) &= \frac{2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

(b) $y'' = -2y' - y \Rightarrow y'' + 2y + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Kyseessä on lineaarinen homogeeninen toisen asteen alkuarvotehtävä. Karakteristinen yhtälö:

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = -1.$$

Karakteristisella yhtälöllä on kaksoisjuuri, jolloin yleinen ratkaisu on

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Vakiot ratkeavat alkuarvoista:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y'(0) = C_2 - C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Siis tehtävän ratkaisu on

$$y(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

Tehtävä 2
(a) Osoitettiin, että jos A on tosi, niin B on tosi eli näyettiin todeksi implikaatioväittämä $A \Rightarrow B$ (suora todistus). Lisäksi näytettiin B todeksi, eli kaikkiaan tuli toteen näytetyksi väittämä $C = (A \Rightarrow B) \wedge B$.

Johtopäätös 'A tosi' on väärä, koska C on tosi myös, kun A on epätosi ja B tosi. Tämän voi nähdä myös totuusarvotaulukosta

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\wedge$	B
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

,

missä A:n ja B:n alle laitetaan kaikki totuusarvoyhdistelmät ja täytetään loput sarakkeet konnektiivien suoritusjärjestyksessä. Kirjasta tuttu totuusarvotaulukko näyttää tältä:

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$(A \Rightarrow B) \wedge B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

.

Nähdään, että itse asiassa propositioiden B ja $C = (A \Rightarrow B) \wedge B$ totuusarvot ovat samat.

(b) Kaikilla $x, y, z \in \mathbb{Q}$ pätee:

(i) $x - x = 0 \in \mathbb{Z} \iff xRx$, eli R on refleksiivinen;

(ii) $xRy \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z} \iff yRx$, eli R on symmetrinen;

(iii) $xRy \wedge yRz \iff x - y \in \mathbb{Z} \wedge y - z \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x - z = x - y + (y - z) \in \mathbb{Z} \iff xRz$, eli R on transitiivinen.

Relaatiolla R on siis kaikki ekvivalenssirelaation ominaisuudet, ja se siis on ekvivalenssirelaatio.

Tehtävä 3

Jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa

$$N_\varepsilon = \lceil (10^{100} - 1)\frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil$$

(missä $\lceil c \rceil = \min\{k \in \mathbb{N} : c \leq k\}$) siten, että kun $n > N_\varepsilon$, pätee

$$\begin{aligned}
\left| \frac{n + 10^{100}}{n+1} - 1 \right| &= \left| \frac{n + 10^{100} - n - 1}{n+1} \right| = \frac{10^{100} - 1}{n+1} \\
&< \frac{10^{100} - 1}{N_\varepsilon + 1} = \frac{10^{100} - 1}{\lceil (10^{100} - 1)\frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil + 1} \\
&< \frac{10^{100} - 1}{(10^{100} - 1)\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis määritelmän mukaan $\lim_{n \to \infty} \frac{n + 10^{100}}{n+1} = 1$.

Käytännössä sopiva N_ε löydetään ratkaisemalla epäyhtälö

$$\left| \frac{n + 10^{100}}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n+10^{100}}{n+1}-1\right| &< \varepsilon \\
\frac{n+10^{100}}{n+1}-1 &< \varepsilon \\
\frac{n+10^{100}}{n+1} &< \varepsilon+1 \\
10^{100} &< (\varepsilon+1)(n+1)-n = \varepsilon n+\varepsilon+1 \\
(10^{100}-1)\cdot\frac{1}{\varepsilon}-1 &< n.
\end{aligned}$$

Nyt haluttu $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (!) saadaan ottamalla viimeisen epäyhtälön vasemmasta puolesta "hattufunktio" $\lceil\cdot\rceil$.

Tehtävä 4

(a) Pätee $a_0 = 2 > 0$. Jos $a_k > 0$, niin myös $a_{k+1} = \frac{a_k}{1+2^{-k}a_k^2} > 0$. Siis induktioperiaatteen mukaan $a_n > 0$ kaikilla n. Toisaalta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+2^{-n}a_n^2} < 1 \quad \forall n,$$

jolloin jono on (aidosti) vähenevä. (Lisäksi $a_n \leq 2\ \forall n$, sillä jono on vähenevä ja $a_0 = 2 \leq 2$.) Rajoitettuna ja monotonisena jono (a_n) siis suppenee.

(b) Sarjan yleiselle termille ($k \neq 0$) pätee

$$\begin{aligned}
\frac{k^3}{(k^2+1000)^2} &= \frac{k^3}{k^4+2k^2 1000+1000000} = \frac{1}{1+2000\frac{1}{k^2}+\frac{1000000}{k^4}}\frac{1}{k} \\
&\geq \frac{1}{1+2000+1000000}\frac{1}{k} = \frac{1}{1002001}\frac{1}{k},
\end{aligned}$$

sillä selvästi $2000\frac{1}{k^2}+\frac{1000000}{k^4} \leq 2000+1000000$. Koska harmoninen sarja $\frac{1}{1002001}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ hajaantuu, minoranttiperiaatteen mukaan myös sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+1000)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+1000)^2}$$

hajaantuu.

(c) Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k/3)^k}{k!}x^k,$$

ja lasketaan tämän suppenemissäde:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(k/3)^k}{k!}\frac{(k+1)!}{((k+1)/3)^{k+1}}\right| &= \frac{k+1}{k+1}\cdot\frac{k^k}{(k+1)^k}\cdot\frac{3^{k+1}}{3^k} \\
&= 3\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 3\cdot\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)^k \\
&= 3\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k = 3\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{-1} \\
&\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 3\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot 1 = \frac{3}{\mathrm{e}} > 1.
\end{aligned}$$

Tällöin potenssisarja suppenee, kun $x = 1$, eli sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k/3)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k/3)^k}{k!}(1)^k$$

suppenee.