Teknillinen korkeakoulu
Systeemianalyysin laboratorio
Sovellettu todennäköisyyslasku (Mat–2.091)
1. Välikoe, 5.11.2001
MALLIRATKAISUT

1. Olkoot A ja B tapahtumia todennäköisyyskentässä S ja $\Pr(A) = 0.7$ ja $\Pr(B) = 0.2$. Määrätään nyt $\Pr(A \cup B)$, kun

(a) $\Pr(A|B) = 0.5$. Lasketaan ensin $\Pr(A \cap B)$: Koska

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}, \text{ niin } \Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) \cdot \Pr(B). \quad (1)$$

Nyt sijoittamalla kaavaan (1) saadaan, että

$$\Pr(A \cap B) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1.$$

Edelleen, koska

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \quad (2)$$

Niin sijoittamalla annetut lukuarvot kaavaan (2), saadaan että

$$\Pr(A \cup B) = 0.7 + 0.2 - 0.1 = \underline{0.8}.$$

(b) A ja B ovat toisensa poissulkevia. Poissulkevuus tarkoittaa sitä, että joukkojen leikkaus on tyhjä eli $A \cap B = \emptyset$. Tästä seuraa se, että $\Pr(A \cap B) = 0$. Nyt saadaan siis, että

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = 0.7 + 0.2 - 0 = \underline{0.9}.$$

(c) A ja B ovat riippumattomia. Riippumattomuudesta seuraa se, että $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$. Nyt, sijoittamalla lukuarvot kaavaan (2) saadaan, että

$$\Pr(A \cup B) = 0.7 + 0.2 - (0.7 \cdot 0.2) = \underline{0.76}.$$

2. Koko systeemissä on kaksi rinnankytkettyä osakomponenttia, vasemmalla oleva ja oikealla oleva. Todennäköisyys että vasemmanpuoleinen osakomponentti toimii, on

$$0.7 + 0.6 - 0.7 \cdot 0.6 = 0.88.$$

Täysin vastaavasti todennäköisyys, että oikeanpuoleinen osakomponentti toimii, on

$$0.4 + 0.5 - 0.4 \cdot 0.5 = 0.7.$$

Jotta virta kulkisi piirin läpi, on molempien näiden sarjaan kytketyn osakomponentin toimittava. Tämän todennäköisyys saadaan kertomalla osakomponenttien toimintatodennäköisyydet keskenään. Saadaan siis, että

$$\Pr(\text{Virta kulkee virtapiirin läpi}) = 0.88 \cdot 0.7 = \underline{0.616} \approx \underline{0.6}.$$

3. Tässä pitää approksimoida normaalijakaumalla. Tällöin saadaan, että $X \sim_a \mathrm{N}(480, 480)$ ja (jatkuvuuskorjauksen kanssa)

$$\Pr(\text{Korkeintaan 500 puhelua}) = \Phi(\frac{500 + 1/2 - 480}{\sqrt{480}}) = \Phi(0.94) \quad (3)$$

missä Φ on normaalijakauman kertymäfunktio. Taulukosta saamme, että

$$\Pr(\text{Korkeintaan 500 puhelua}) = \Phi(0.94) = \underline{0.8264}.$$

Huom. Täydet pisteet sai myös ilman, että oli käyttänyt jatkuvuuskorjausta, eli tuota puolikasta kaavan (3) osoittajassa.

4. Kannattaa piirtää ensin taulukot eri tulosvaihtoehdoista. Olkoon nyt siis X_1 = ekan nopan silmäluku, X_2 = tokan nopan silmäluku ja $Z = X_1 - X_2$ = ekan nopan silmäluvun ja tokan nopan silmäluvun erotus.

(a) Nyt $\Pr(Z = -4) = \frac{2}{36}$, koska vain tulokset (1,5) ja (2,6) ovat suotuisia. Ja kaikkia tulosvaihtoehtojahan on kahden nopan heitossa 36 kappaletta.

(b) Selvästi ehdollinen todennäköisyys: $\Pr(Z = -4|X_1 = 5) = 0$, koska jos ekalla nopalla tulee vitonen, niin erotukseksi ei voi tulla silloin -4. (Tällöinhän pitäisi saada tokalla nopalla 9, joka on mahdotonta.)

(c) Ehdollinen odotusarvo: $\mathrm{E}(Z|X_1 = 5) = \frac{1}{6}(4+3+2+1+0+(-1)) = 1.5$.

HUOM. Valitustilaisuus järjestetään viikolla 46 tai 47. Seuraa myös kurssin www-sivuja.