# Mat-2.091 Sovellettu todennäköisyyslasku

Palo
1. välikoe 1.11. 2004, ratkaisut

**1.** Suuresta tavaraerästä poimitaan umpimähkään 20 kpl:n otos, joka tarkastetaan. Erä hylätään, jos otoksessa on kaksi tai useampia viallisia, muuten hyväksytään. Oletetaan, että saapuvasta tavaraerästä 7% on viallisia. Olkoon satunnaismuuttuja $X$ = viallisten lukumäärä otoksessa.

a) Laske satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo ja standardipoikkeama.

b) Millä todennäköisyydellä erä hylätään?

**Ratkaisu:**

$X$ on noudattaa binomijakaumaa: $X \sim \mathrm{Bin}(n = 20, p = 0.07)$.

a) Kaavakokoelmasta saadaan kaavat ja sijoittamalla numeroarvot:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= np = 20 \times 0.07 = 1.4 \\
\mathrm{Var}(X) &= npq = np(1-p) = 20 \times 0.07 \times 0.93 = 1.302 \\
\mathrm{D}(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx 1.141
\end{aligned}$$

$X$:n odotusarvo on 1.4 ja standardipoikkeama noin 1.141.

b) Erä hylätään, jos $X$ saa arvon 2 tai sitä suuremman arvon. Kysytty todennäköisyys on siten:

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq 2) &= 1 - \Pr(X \leq 2) = 1 - \Pr(X = 0) - \Pr(X = 1) \\
&= 1 - \binom{20}{0} q^{20} - \binom{20}{1} pq^{19} = 1 - \binom{20}{0}(1-p)^{20} - \binom{20}{1} p(1-p)^{19} \\
&\approx 0.4131
\end{aligned}$$

Erän hylkäämisen todennäköisyys on noin 0.4131.

**2.** Kolmella tykillä ammutaan yhteislaukaus liikkuvaan maaliin. Kukin tykki tähdätään toisista riippumattomasti ja osumistodennäköisyydet ovat 0.2, 0.4 ja 0.5. Olkoon $X$ = osumien lukumäärä.

a) Määritä $X$:n jakauma (ts. todennäköisyydet $\Pr(X = k)$) sekä odotusarvo $\mathrm{E}(X)$.

b) Jos ammutaan neljä yhteislaukausta, millä todennäköisyydellä saadaan yhteensä korkeintaan yksi osuma?

**Ratkaisu:**

a) (Kuten tehtävänannossa sanotaan pelkät pistetodennäköisyysfunktion arvot eli pistetodennäköisyydet riittävät. Tällä jakaumalla ei ole nimeä.)
Määritellään tapahtumat:

$1O$ = {1. tykki osuu}  $1H$ = {1. tykki ampuu ohi (huti)}
$2O$ = {2. tykki osuu}  $2H$ = {2. tykki ampuu ohi (huti)}
$3O$ = {3. tykki osuu}  $3H$ = {3. tykki ampuu ohi (huti)}

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \Pr(X=0) \\
&= \Pr(1H)\Pr(2H)\Pr(3H) \\
&= 0.8 \times 0.6 \times 0.5 = \underline{\underline{0.24}} \\
f(1) &= \Pr(X=1) \\
&= \Pr(1O)\Pr(2H)\Pr(3H) + \Pr(1H)\Pr(2O)\Pr(3H) + \Pr(1H)\Pr(2H)\Pr(3O) \\
&= 0.2 \times 0.6 \times 0.5 + 0.8 \times 0.4 \times 0.5 + 0.8 \times 0.6 \times 0.5 = \underline{\underline{0.46}} \\
f(2) &= \Pr(X=2) \\
&= \Pr(1O)\Pr(2O)\Pr(3H) + \Pr(1H)\Pr(2O)\Pr(3O) + \Pr(1O)\Pr(2H)\Pr(3O) \\
&= 0.2 \times 0.4 \times 0.5 + 0.8 \times 0.4 \times 0.5 + 0.2 \times 0.6 \times 0.5 = \underline{\underline{0.26}} \\
f(3) &= \Pr(X=3) \\
&= \Pr(1O)\Pr(2O)\Pr(3O) \\
&= 0.2 \times 0.4 \times 0.5 = \underline{\underline{0.04}}
\end{aligned}
$$

Edellä laskettujen todennäköisyyksien perusteella saadaan $X$:n odotusarvo:

$$
\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = 0 \times 0.24 + 1 \times 0.46 + 2 \times 0.26 + 3 \times 0.04 = \underline{\underline{1.1}}
$$

b) Olkoon $X_4$ neljällä yhteislaukauksella saatujen osumien kokonaislukumäärä. Todennäköisyys, että neljällä yhteislaukaukselle saadaan korkeintaan yksi osuma on

$$
\begin{aligned}
\Pr(X_4 \leq 1) &= \Pr(X_4 = 0) + \Pr(X_4 = 1) \\
&= \Pr(X=0)^4 + \binom{4}{1} \Pr(X=1)\Pr(X=0)^3 \\
&\approx \underline{\underline{0.02875}}
\end{aligned}
$$

**3.** Teemu Teekkari on kiireinen, joten hän päättää kopioida laskuharjoitustehtävän vastauksen kaveriltaan Martti Matemaatikolta. Martti laskee tehtävän oikein todennäköisyydellä 0.9. Teemu puolestaan kopioidessaan löytää virheen väärin lasketusta tehtävästä todennäköisyydellä 0.6 ja luulee oikein laskettua tehtävää virheelliseksi todennäköisyydellä 0.2. Oletetaan, että oikean virheen löytäessään Teemu laskee tehtävän itse oikein ja kuvitteellisen virheen löytäessään laskee sen vastaavasti väärin. Oletetaan vielä lisäksi, että joka tapauksessa Teemu palauttaa itse laskemansa tehtävän kertomatta Martille mahdollisesti löytämästään virheestä.

a) Mikä on todennäköisyys, että Teemun palauttama tehtävä on väärin?

b) Mikä on todennäköisyys, että Martin palauttama tehtävä on oikein, jos Teemun palauttama tehtävä oli väärin?

**Ratkaisu:**

Määritellään tapahtumat:

$MO$ = {Martin vastaus on oikein.} $MV$ = {Martin vastaus on väärin.}

$TO$ = {Teemun vastaus on oikein.} $TV$ = {Teemun vastaus on väärin.}

Tehtävänannon perusteelle tunnemme seuraavat todennäköisyydet:

$$
\begin{aligned}
\Pr(MO) &= 0.9 & \Pr(MV) &= 0.1 \\
\Pr(TO|MO) &= 0.8 & \Pr(TO|MV) &= 0.6 \\
\Pr(TV|MO) &= 0.2 & \Pr(TV|MV) &= 0.4
\end{aligned}
$$

a) Päättelemällä, johtamalla tai suoraan kokonaistodennäköisyyden kaavaa soveltamalla:

$$\begin{aligned}\Pr(TV) &= \Pr(TV \cap MV) + \Pr(TV \cap MO) \\ &= \Pr(TV|MV)\Pr(MV) + \Pr(TV|MO)\Pr(MO) \\ &= 0.4 \times 0.1 + 0.2 \times 0.9 = \underline{\underline{0.22}}\end{aligned}$$

b) Päättelemällä, johtamalla tai suoraan Bayesin kaavaa soveltamalla:

$$\begin{aligned}\Pr(MO|TV) &= \frac{\Pr(MO \cap TV)}{\Pr(TV)} = \frac{\Pr(TV|MO)\Pr(MO)}{\Pr(TV|MV)\Pr(MV) + \Pr(TV|MO)\Pr(MO)} \\ &= \frac{0.2 \times 0.9}{0.4 \times 0.1 + 0.2 \times 0.9} \approx \underline{\underline{0.8182}}\end{aligned}$$

**4.** Suuren tavaratalon valitusten vastaanottoon tulee keskimäärin 3.5 asiakasta tunnissa. Vastaanoton vakinainen hoitaja joutuu poistumaan asioille ja jättää paikkansa yhden tunnin ajaksi apulaisen hoidettavaksi.

a) Millä todennäköisyydellä apulainen joutuu palvelemaan vähintään kolmea asiakasta?

b) Oletetaan, että vakituinen virkailija soittaa puolen tunnin kuluttua lähdöstään ja saa tietää, että siihen mennessä on käynyt tasan yksi asiakas. Mikä on todennäköisyys, että tässä tapauksessa asiakkaita tulee yhteensä vähintään kolme koko tunnin aikana? (Toisin sanoen, että jälkimmäisen puolen tunnin aikana tulee ainakin kaksi lisää.)

**Ratkaisu:**

Asiakkaiden lukumäärä tunnissa $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda s)$. Tässä tehtävässä $\lambda = 3.5$ asiakasta/h ja $s$ tarkasteltavan ajanjakson pituus.

a) Kun tarkastellaan koko tuntia $s = 1$ h ja siten $X \sim \mathrm{Poisson}(3.5)$. Siispä kysytty todennäköisyys saadaan seuraavasti

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 3) &= 1 - \Pr(X < 3) = 1 - \Pr(X = 0) - \Pr(X = 1) - \Pr(X = 2) \\ &= 1 - \frac{e^{-3.5}\,3.5^0}{!0} - \frac{e^{-3.5}\,3.5^1}{!1} - \frac{e^{-3.5}\,3.5^2}{!2} \\ &= 1 - e^{-3.5}(1 + 3.5 + 3.5^2 \times 0.5) \approx \underline{\underline{0.6792}}\end{aligned}$$

b) Olkoon $X_1$ on asiakkaiden määrä ensimmäisen puolituntisen ja $X_2$ toisen puolituntisen aikana. Kun tarkastellaan puolta tuntia $s = 0.5$ h ja siten $X_i \sim \mathrm{Poisson}(1.75)$. Nyt kuitenkin $X_1 \perp X_2$ (eli perättäiset puolituntiset ovat riippumattomia), joten kysytty todennäköisyys:

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 + X_2 \geq 3|X_1 = 1) &= \Pr(X_2 \geq 2) = 1 - \Pr(X_2 = 0) - \Pr(X_2 = 1) \\ &= 1 - \frac{e^{-1.75}\,1.75^0}{!0} - \frac{e^{-1.75}\,1.75^1}{!1} \\ &= 1 - e^{-1.75}(1 + 1.75) \approx \underline{\underline{0.5221}}\end{aligned}$$