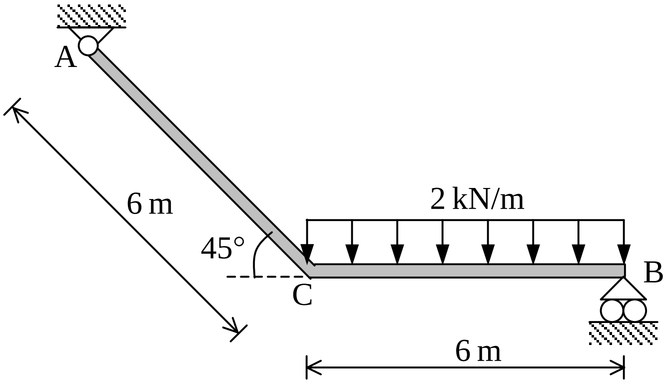
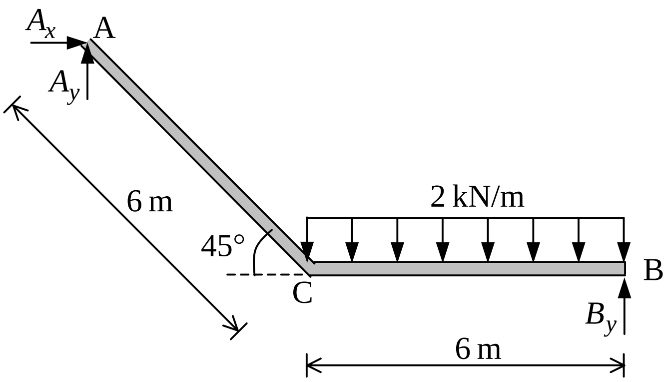
Ratkaisut:

1. Määritä oheisen tasokehän normaalivoima-, leikkausvoima- ja taivutusmomenttikuvio sekä taivutusmomentin maksimiarvo.



Ratkaisu:

VKK:



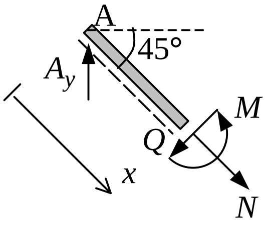
Tukireaktiot:

$$\rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\circlearrowleft A \quad B_y \cdot \left(6\,\text{m} + \frac{6\,\text{m}}{\sqrt{2}}\right) - 2\,\frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 6\,\text{m} \cdot \left(3\,\text{m} + \frac{6\,\text{m}}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 6 \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,\text{kN} \approx 8.49\,\text{kN}$$

$$\uparrow \quad A_y + B_y - 2\,\frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 6\,\text{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,\text{kN} \approx 3.51\,\text{kN}$$

Väli AC, VKK:



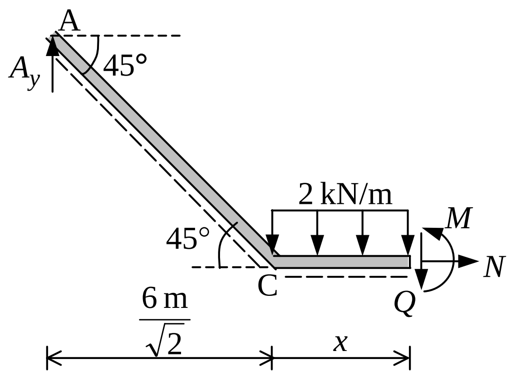
$$\searrow \quad N - \frac{A_y}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{A_y}{\sqrt{2}} = \frac{6}{1+\sqrt{2}}\,\text{kN} \approx 2.49\,\text{kN}$$

$$\swarrow \quad Q - \frac{A_y}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{A_y}{\sqrt{2}} = \frac{6}{1+\sqrt{2}}\,\text{kN} \approx 2.49\,\text{kN}$$

$$\circlearrowleft \quad M - \frac{A_y}{\sqrt{2}} \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{A_y}{\sqrt{2}}\,x = \frac{6}{1+\sqrt{2}}\,x\,\text{kN}$$

$$\approx 2.49x\,\text{kN}.$$

Väli CB, VKK:



$$\rightarrow \quad N = 0$$

$$\downarrow \quad Q - A_y + 2\,\frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow \quad Q = A_y - 2\,x\,\frac{\text{kN}}{\text{m}} = \frac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,\text{kN} - 2\,x\,\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$\approx 3.51\,\text{kN} - 2\,x\,\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$\circlearrowleft \quad M - A_y \cdot \left(\frac{6\,\text{m}}{\sqrt{2}} + x\right) + 2\,\frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M = \frac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,\text{kN} \cdot \left(\frac{6\,\text{m}}{\sqrt{2}} + x\right) - x^2\,\frac{\text{kN}}{\text{m}} = \frac{36}{1+\sqrt{2}}\,\text{kNm} + \frac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,x\,\text{kN} - x^2\,\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

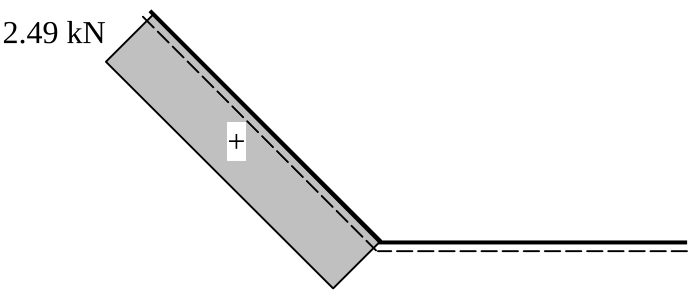
$$\approx 14.91\,\text{kNm} + 3.51\,x\,\text{kN} - x^2\,\frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

$$Q(x_0) = \frac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,\text{kN} - 2x_0\,\frac{\text{kN}}{\text{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,\text{m} \approx 1.757\,\text{m}$$

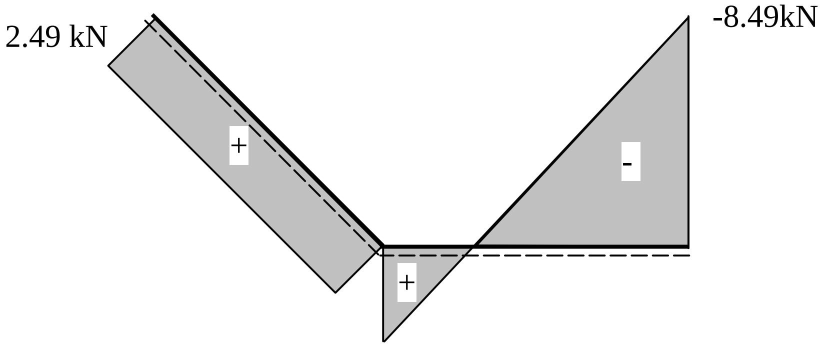
$$M_{\text{max}} = M(x_0) = \frac{36}{1+\sqrt{2}}\,\text{kNm} + \frac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\left(\frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,\text{m}\right)\text{kN} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\,\text{m}\right)^2\frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

$$= \frac{54+36\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\,\text{kNm} = 18\,\text{kNm}.$$

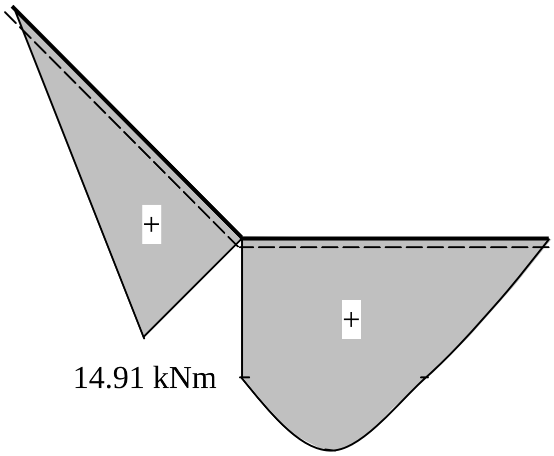
$N -$ kuvio



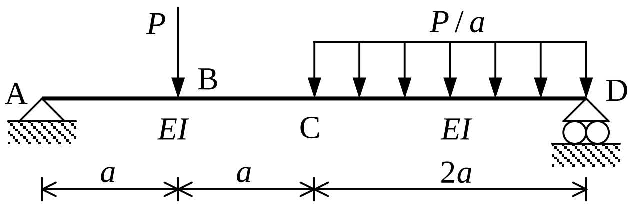
$Q -$ kuvio



$M -$ kuvio

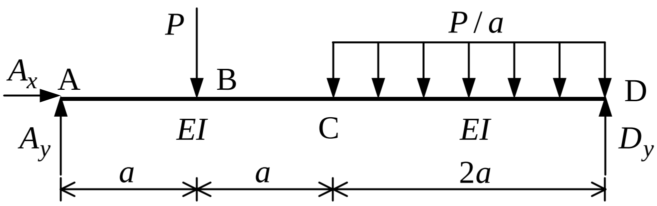


2. Määritä momenttipintamenetelmällä oheisen palkin kiertymä ja taipuma pisteessä C.



Ratkaisu:

VKK:



Tukireaktiot:

$$A_x = 0$$

$$P \cdot a + \frac{P}{a} \cdot 2a \cdot 3a - D_y \cdot 4a = 0$$

$$\Rightarrow \quad D_y = \frac{7}{4} P$$

$$A_y + D_y - P - \frac{P}{a} \cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_y = \frac{5}{4} P$$

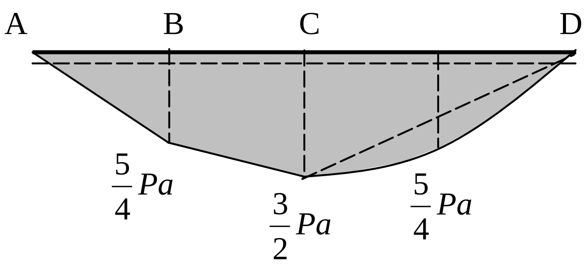
Taivutusmomentin arvoja:

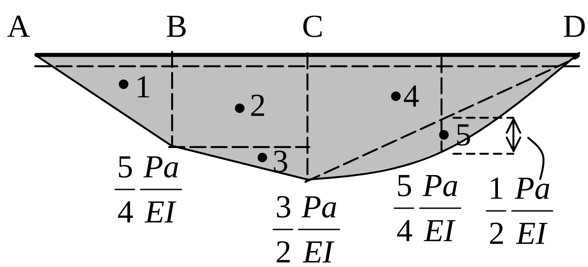
$$M_B = A_y \cdot a = \frac{5}{4} Pa$$

$$M_C = A_y \cdot 2a - P \cdot a = (\frac{5}{4} \cdot 2 - 1) Pa = \frac{3}{2} Pa$$

$$M_{C,D} = D_y \cdot a - \frac{P}{a} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = (\frac{7}{4} - \frac{1}{2}) Pa = \frac{5}{4} Pa \qquad \text{(C:n ja D:n puolivälissä)}$$

$M -$kuvio $\qquad\qquad$ $\kappa -$kuvio $\;$ ($M / EI -$kuvio)





Osapintojen alat:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \frac{Pa}{EI} \cdot a = \frac{5}{8} \frac{Pa^2}{EI}, \qquad A_2 = \frac{5}{4} \frac{Pa}{EI} \cdot a = \frac{5}{4} \frac{Pa^2}{EI},$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{Pa}{EI} \cdot a = \frac{1}{8} \frac{Pa^2}{EI}, \qquad A_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{Pa}{EI} \cdot 2a = \frac{3}{2} \frac{Pa^2}{EI},$$

$$A_5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} \cdot 2a = \frac{2}{3} \frac{Pa^2}{EI} .$$

Huomioidaan reunaehdot:

$$\underbrace{v_D}_{=0} - \underbrace{v_A}_{=0} = \varphi_A (\overbrace{x_D - x_A}^{=4a}) - M_{AD} \quad \Rightarrow \quad \varphi_A = \frac{M_{AD}}{4a} ,$$

missä pisteiden A ja D välisen käyristymäkuvion momentti pisteen D suhteen on

$$M_{AD} = A_1 c_1 + A_2 c_2 + A_3 c_3 + A_4 c_4 + A_5 c_5 ,$$

missä c_i on osan i pintakeskiön etäisyys pisteestä D. Etäisyyksille (momenttivarsille) saadaan

$$c_1 = (\frac{1}{3} + 3)a = \frac{10}{3} a , \qquad c_2 = (\frac{1}{2} + 2)a = \frac{5}{2} a , \qquad c_3 = (\frac{1}{3} + 2)a = \frac{7}{3} a ,$$
$$c_4 = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4}{3} a , \qquad c_5 = a .$$

Momenttitermi on nyt

$$M_{AD} = (\frac{5}{8} \cdot \frac{10}{3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot 1) \frac{Pa^3}{EI}$$
$$= \frac{1}{24} (50 + 75 + 7 + 48 + 16) \frac{Pa^3}{EI} = \frac{49}{6} \frac{Pa^3}{EI} ,$$

joten pisteen A kiertymälle saadaan

$$\varphi_A = \frac{M_{AD}}{4a} = \frac{49}{24} \frac{Pa^2}{EI} .$$

Pisteen C kiertymälle saadaan

$$\varphi_C - \varphi_A = -A_{AC} = -(A_1 + A_2 + A_3) = -(\frac{5}{8} + \frac{5}{4} + \frac{1}{8}) \frac{Pa^2}{EI} = -2 \frac{Pa^2}{EI} \quad \Rightarrow$$
$$\varphi_C = \varphi_A - A_{AC} = (\frac{49}{24} - 2) \frac{Pa^2}{EI} = \frac{1}{24} \frac{Pa^2}{EI} .$$

Pisteen C taipuma:

$$v_C - \underbrace{v_A}_{=0} = \underbrace{\varphi_A}_{= \frac{49}{24} \frac{Pa^2}{EI}} (\overbrace{x_C - x_A}^{=2a}) - M_{AC} ,$$

$$M_{AC} = A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3 ,$$

missä d_i on osan *i* pintakeskiön etäisyys pisteestä C. Etäisyyksille saadaan

$$d_1 = (\frac{1}{3} + 1)a = \frac{4}{3}a\,, \qquad d_2 = \frac{1}{2}a\,, \qquad d_3 = \frac{1}{3}a\,.$$

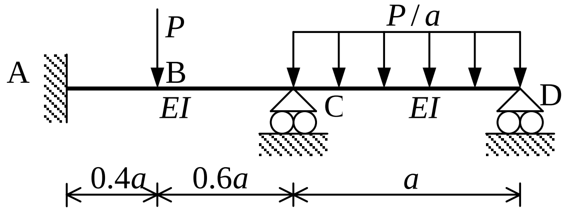
Momenttitermi on nyt

$$M_{AC} = (\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3})\frac{Pa^3}{EI} = \frac{3}{2}\frac{Pa^3}{EI}\,,$$

joten pisteen C taipumalle saadaan

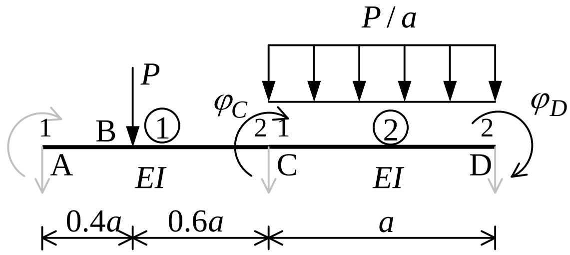
$$v_C = (\frac{49}{24} \cdot 2 - \frac{3}{2})\frac{Pa^3}{EI} = \frac{31}{12}\frac{Pa^3}{EI}\,.$$

3. Määritä siirtymämenetelmällä oheisen palkin kiertymät pisteissä C ja D sekä taivutusmomentit pisteissä A ja B.



Ratkaisu:

Sauvanumerointi ja nurkkien siirtymävapausasteet.



Siirtymävapausasteita vastaavat voimaresultantit siirtymien avulla:

$$\Sigma M_C = M_2^1 + M_1^2 = \frac{EI}{a^2}(6\underbrace{v_A}_{=0} + 2a\underbrace{\varphi_A}_{=0} - 6\underbrace{v_C}_{=0} + 4a\varphi_C) + MK_2^1 +$$

$$\frac{EI}{a^2}(6\underbrace{v_C}_{=0} + 4a\varphi_C - 6\underbrace{v_D}_{=0} + 2a\varphi_D) + MK_1^2$$

$$= \frac{8EI}{a}\varphi_C + \frac{2EI}{a}\varphi_D + MK_2^1 + MK_1^2,$$

missä

$$MK_2^1 = \frac{P\cdot(\frac{4}{10}a)^2\cdot\frac{6}{10}a}{a^2} = \frac{12}{125}Pa\,, \qquad MK_1^2 = -\frac{\frac{P}{a}\cdot a^2}{12} = -\frac{1}{12}Pa\,,$$

joten

$$\sum M_C = \frac{8EI}{a}\varphi_C + \frac{2EI}{a}\varphi_D + \frac{19}{1500}Pa\,.$$

$$\Sigma M_D = M_2^2 = \frac{EI}{a^2}(6\underbrace{v_C}_{=0} + 2a\varphi_C - 6\underbrace{v_D}_{=0} + 4a\varphi_D) + MK_2^2$$

$$= \frac{2EI}{a}\varphi_C + \frac{4EI}{a}\varphi_D + MK_2^2,$$

missä

$$MK_2^2 = \frac{\frac{P}{a}\cdot a^2}{12} = \frac{1}{12}Pa\,,$$

joten

$$\sum M_D = \frac{2EI}{a}\varphi_C + \frac{4EI}{a}\varphi_D + \frac{1}{12}Pa\,.$$

Nurkkien tasapainoyhtälöt:

$$\Sigma M_C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8EI}{a}\varphi_C + \frac{2EI}{a}\varphi_D + \frac{19}{1500}Pa = 0\,,$$

$$\Sigma M_D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2EI}{a}\varphi_C + \frac{4EI}{a}\varphi_D + \frac{1}{12}Pa = 0\,.$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on:

$$\varphi_C = \frac{29}{7000}\frac{Pa^2}{EI} \approx 0.004143\frac{Pa^2}{EI}\,, \qquad \varphi_D = -\frac{481}{21000}\frac{Pa^2}{EI} \approx -0.022905\frac{Pa^2}{EI}\,.$$

Taivutusmomentti pisteessä A:

$$M_A = M_1^1 = \frac{EI}{a^2}\cdot 2a\varphi_C + MK_1^1\,,$$

missä

$$MK_1^1 = -\frac{P\cdot\frac{4}{10}a\cdot(\frac{6}{10}a)^2}{a^2} = -\frac{18}{125}Pa\,,$$

joten

$$M_A = \frac{2EI}{a}\cdot\frac{29}{7000}\frac{Pa^2}{EI} - \frac{18}{125}Pa = -\frac{19}{140}Pa \approx -0.1357\,Pa\,.$$

Leikkausvoima pisteessä B:

$$Q_A = -V_1^1 = -(\frac{EI}{a^3}\cdot 6a\varphi_C + VK_1^1)\,,$$

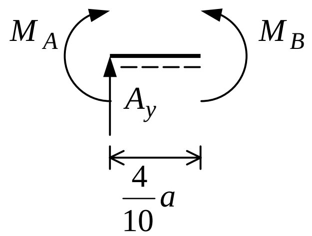
missä

$$VK_1^1 = -\frac{P\cdot\frac{6}{10}a}{a}[1 + \frac{\frac{4}{10}a(\frac{6}{10}a - \frac{4}{10}a)}{a^2}] = -\frac{81}{125}P \approx -0.6480\,P\,,$$

joten

$$Q_A = -(\frac{EI}{a^3}\cdot 6a\cdot\frac{29}{7000}\frac{Pa^2}{EI} - \frac{81}{125}P) \approx 0.6231P\,. \qquad \mathbf{(=} A_y\mathbf{)}$$

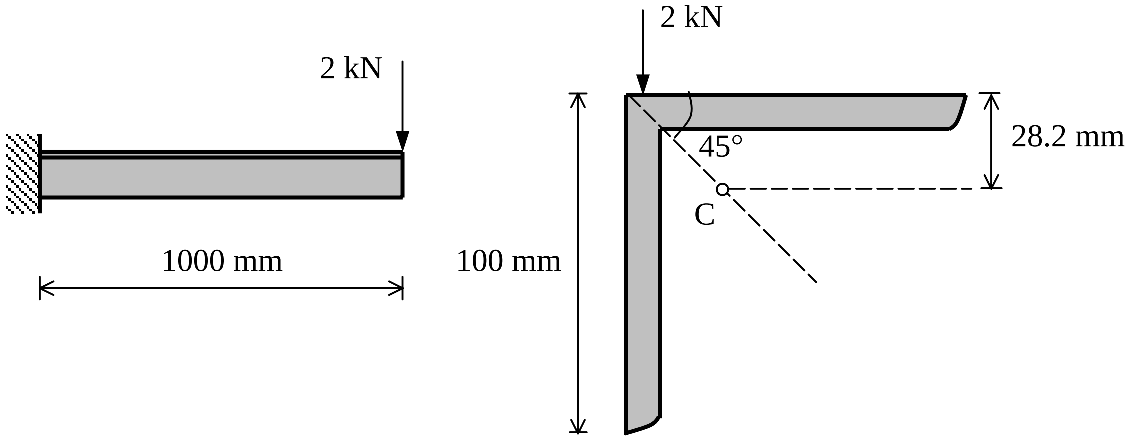
Taivutusmomentti pisteessä B:



$$M_B = M_A + A_y\cdot\frac{4}{10}a$$

$$= -0.1357\,Pa + 0.6231P\cdot\frac{4}{10}a = 0.1135\,Pa.$$

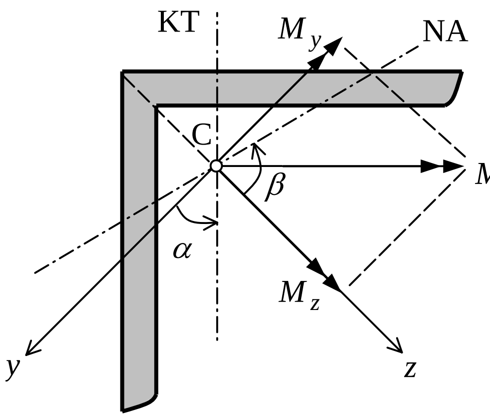
4. Tasakylkisestä kulmatangosta $L100 \times 10$ on valmistettu oheinen ulokepalkki. Palkin pääjäyhyysmomentit ovat: $I_1 = 2.80 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ ja $I_2 = 0.733 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. Määritä palkin tuella sijaitsevan poikkileikkauksen suurin ja pienin normaalijännitys.



Ratkaisu:

Taivutusmomentin arvo tuella on $M = -2\text{ kN} \cdot 1\text{ m} = -2\text{ kNm}$. Kyseessä on puhdas vino taivutus (koska $N = 0$), jolloin normaalijännityksen lauseke on

$$\sigma(y,z) = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \, .$$



Edellinen normaalijännityksen lauseke on voimassa pääkoordinaatistossa (viereisen kuvan y,z-koordinaatistossa). Huomaa, että nyt $I_z = I_1$ ja $I_y = I_2$.

Taivutusmomentin komponentit ovat:

$$M_z = M \cos\alpha = -2\text{ kNm}/\sqrt{2} = -1.4142\text{ kNm}$$
$$M_y = M \sin\alpha = -2\text{ kNm}/\sqrt{2} = -1.4142\text{ kNm}$$

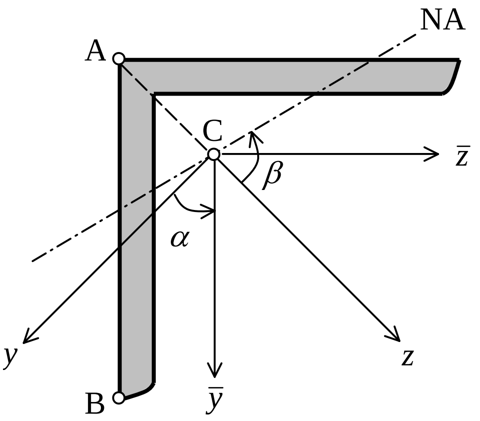
Edellisessä kulma $\alpha = 45°$ oli kuormitustason (KT) suuntakulma positiivisesta y-akselista vastapäivään mitattuna. Neutraaliakselin suuntakulmalle β saadaan

$$\tan\beta = \frac{I_z}{I_y}\tan\alpha = \frac{2.80 \cdot 10^6}{0.733 \cdot 10^6}\tan(45°) = 3.82 \quad \Rightarrow \quad \beta = 75.3° \, .$$

Neuraaliakselin (NA) suuntakulma mitataan positiivisesta z-akselista vastapäivään.

Itseisarvoltaan suurimmat normaalijännitykset esiintyvät pisteissä, jotka ovat mahdollisimman kaukana neutraaliakselista. Nämä pisteet ovat pisteet A ja B oheisessa kuvassa.

Tarvitsemme pisteiden A ja B koordinaatit pääkoordinaatistossa *y*,*z*. Koordinaatiston kierron muunnoskaavat ovat:



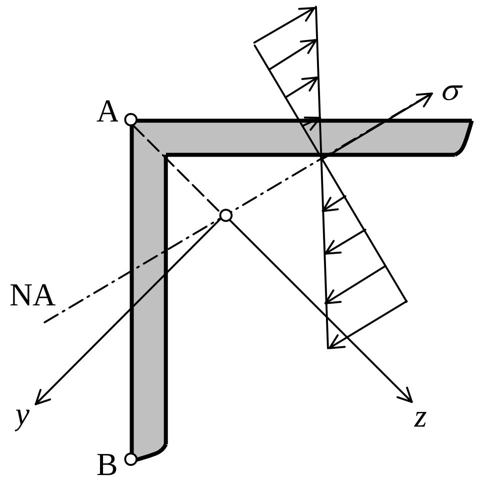
$$y = \bar{y}\cos\alpha - \bar{z}\sin\alpha$$
$$z = \bar{y}\sin\alpha + \bar{z}\cos\alpha$$

Pisteen A $(\bar{y}_A, \bar{z}_A) = (-28.2\,\text{mm}, -28.2\,\text{mm})$:

$$y_A = -28.2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 28.2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$z_A = -28.2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 28.2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -39.9\,\text{mm}$$

Pisteen B $(\bar{y}_B, \bar{z}_B) = (71.8\,\text{mm}, -28.2\,\text{mm})$:

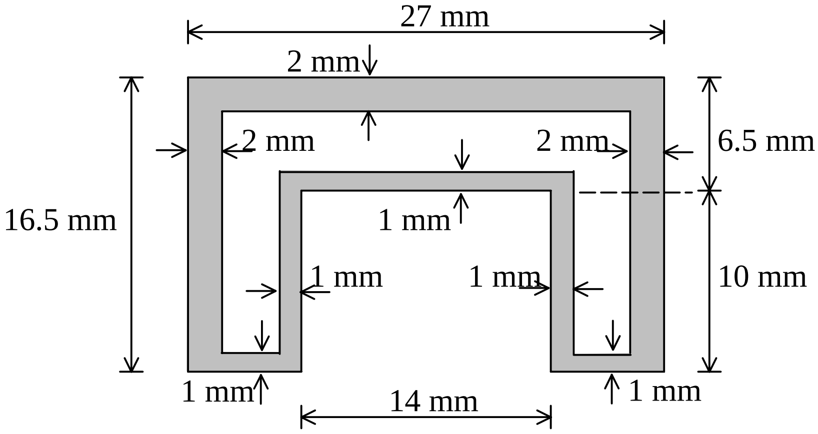
$$y_B = 71.8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 28.2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 70.7\,\text{mm}$$
$$z_B = 71.8\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 28.2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 30.8\,\text{mm}$$



Normaalijännitykset:

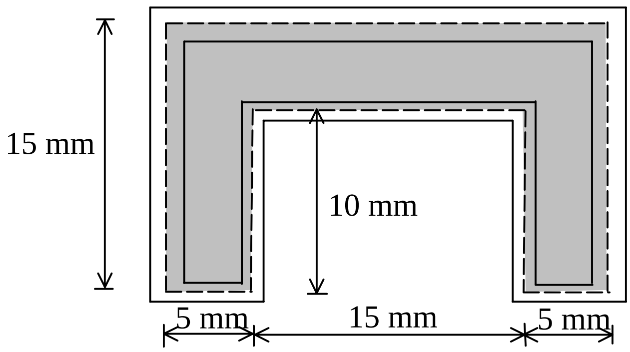
$$\sigma_A = \frac{M_z}{I_z}\overbrace{y_A}^{=0} + \frac{M_y}{I_y}z_A$$
$$= \frac{-1.4142\cdot 10^6}{0.733\cdot 10^6}\cdot(-39.9) = 77.0\ \text{MPa}$$
$$\sigma_B = \frac{M_z}{I_z}y_B + \frac{M_y}{I_y}z_B$$
$$= \frac{-1.4142\cdot 10^6}{2.80\cdot 10^6}\cdot 70.7 + \frac{-1.4142\cdot 10^6}{0.733\cdot 10^6}\cdot 30.8 = -95.1\ \text{MPa}$$

5. Oheista ohutseinämäistä poikkileikkausta rasittaa 20 Nm:n suuruinen vääntömomentti. Määritä poikkileikkauksen suurin (keskimääräinen) leikkausjännitys ja sauvan vääntymä poikkileikkauksen kohdalla. Sauva on terästä, jonka leikkausmoduli on $G = 80\,\text{GPa}$.



Ratkaisu:

Profiilin seinämän keskilinjan rajoittaman alueen pinta-alaksi saadaan (kts. oheinen kuva)



$$A = 15 \cdot 25 - 15 \cdot 10$$
$$= 225\,\text{mm}^2.$$

Vääntövastus:

$$W_t = 2At_{\min}$$
$$= 2 \cdot 225 \cdot 1 = 450\,\text{mm}^3.$$

Suurin leikkausjännitys:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{20 \cdot 10^3}{450} = 44.4\,\text{MPa}\,.$$

Vääntöjäyhyysmomentti:

$$I_t = \frac{4A^2}{\sum \frac{s_i}{t_i}} = \frac{4 \cdot 225^2}{2 \cdot \frac{5}{1} + 2 \cdot \frac{10}{1} + \frac{15}{1} + 2 \cdot \frac{15}{2} + \frac{25}{2}} = \frac{4 \cdot 225^2}{72.5} = 2793\,\text{mm}^4\,.$$

Vääntymä:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{20 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 \cdot 2793} = 8.95 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{rad}}{\text{mm}} = 0.0895\,\frac{\text{rad}}{\text{m}}\,.$$