

Mat-1.1210 Matematiikan peruskurssi S1

2. välikoe 19.11.2007

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. a) Määritä raja-arvo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\sqrt{x+5h} - \sqrt{x}}$ kun $x > 0$.

b) Osoita jatkuvan funktion väliarvo-ominaisuuden eli "Bolzanon merkinvaihtolauseen" (the intermediate value theorem) avulla, että yhtälöllä

$$x^3 + a = \sin^2 x$$

on ratkaisu x kaikilla parametrin arvoilla $a \in \mathbb{R}$.

Vihje b-kohtaan: Pätee aina $0 \leq \sin^2 x \leq 1$.

2. a) Etsi käyrän $x + y^2 + y \sin x = y^3 + \pi$ tangentin yhtälö pisteessä $(x, y) = (\pi, 1)$.

b) Määritellään funktio $f(x) = \sin x + x^2$ määrittelyjoukossa $x \geq 0$. Perustele miksi f :llä on käänteisfunktio. Piirrä myös kuvaaja. Mikä on tämän käänteisfunktion määrittelyjoukko?

Vihje b-kohtaan: Käänteisfunktioille ei voi kirjoittaa kaavaa ainakaan helposti.

3. a) Etsi jokin ratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$x'(t) + x(t) = t + \cos^2 t.$$

Vihje: Ratkaise sopivalla yrittelyllä yhtälöt $y'(t) + y(t) = t + \frac{1}{2}$ ja $z'(t) + z(t) = \frac{1}{2} \cos 2t$. Kuinka saat muodostettua näistä funktioista $y(t)$ ja $z(t)$ halutun ratkaisun $x(t)$?

b) Ratkaise alkuarvotettava

$$y'' - 3y' - 10y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

4. Etsi epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $y''(t) + 2y'(t) - 2y(t) = e^{t+1}$ yleinen ratkaisu.