



Kokeessa saa käyttää laskinta. Jokainen tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Osatehtävien painoarvo on aina yhtäsuuri ellei painoja ole erikseen annettu.

## Tehtävät

TEHTÄVÄ 1 Harmoniset luvut  $H_1, H_2, H_3, \dots$  määritellään muodossa

$$H_1 = 1, \quad H_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots$$

ja yleisesti  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ , kaikille  $n \in \mathbb{N}$ . Osoita käyttäen matemaattista induktiota, että

$$\sum_{j=1}^n H_j = (n+1)H_n - n,$$

kaikille  $n \in \mathbb{N}$ .

TEHTÄVÄ 2

(a) Etsi lukujen  $a = 22077$  ja  $b = 40140$  suurin yhteinen tekijä  $d = (a, b)$  ja etsi kertoimet  $x, y \in \mathbb{Z}$  s.e.  $d = ax + by$ .

(b) Määritä  $2007^{20} \pmod{11}$ .

TEHTÄVÄ 3 Etsi täydellisille kaksijakoisille graafeille  $K_{n,m} = (V, E)$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , joille  $V = V_1 \cup V_2$  s.e.  $|V_1| = n$ ,  $|V_2| = m$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  ja ei ole olemassa sivua  $e = (x, y) \in E$ ,  $x \in V_i$ ,  $y \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , a) Eulerin polut ja kierrokset, b) Hamiltonin polut ja kierrokset, ja c) kromaattiset luvut  $\chi(K_{n,m})$ , jos ne ovat olemassa.

TEHTÄVÄ 4 Suuntaamaton painotettu graafi  $G$  on annettu oheisen taulukon avulla.

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$a$	*						
$b$	40	*					
$c$	75	90	*				
$d$	10	105	55	*			
$e$		40	60	30	*		
$f$			60	70	10	*	
$g$			60	20	50	70	*

(a) Etsi lyhin polku  $a$ :sta  $g$ :hen ja laske sen paino.

(b) Etsi eräs minimaalinen virittäjäpuu ja laske sen paino.

Esitä käyttämäsi algoritmin eteneminen selkeästi.