Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II
Alestalo/Pursiainen

TENTTI 18.12.2007.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Vain funktiolaskin on sallittu. Koeaika on 4 tuntia.

1. Määritä matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
LU-hajotelma ja ratkaise sen avulla yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = [5, 2, -1]^T$.

2. Kirjoita yhtälöryhmä $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ matriisimuodossa ja määritä sille PNS-ratkaisu.
b) Olkoon
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Totea, että $B^3 = O$ = nollamatriisi, ja laske tätä tietoa käyttämällä e^{tB}.

3. Matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
ominaisarvot ovat 0, 1 ja 4 ja niitä vastaavat ominaisvektorit $[1, 1, -1]^T$, $[1, 0, 0]^T$ ja $[5, 3, 3]^T$.
a) Selitä, miten ominais*arvot* saatiin.
b) Määritä differentiaaliyhtälöryhmään $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} - [2e^{2t}, 2e^{2t}, 2e^{2t}]^T$ liittyvän alkuarvotehtävän $\mathbf{y}(0) = [0, 0, 2]^T$ ratkaisu.

4. Tarkastellaan epälineaarista differentiaaliyhtälöryhmää
$$\begin{cases} y_1' = y_2(1 - 2y_1) \\ y_2' = y_1(1 + 2y_2). \end{cases}$$
Määritä systeemin kaikki tasapainotilat (2 kpl) ja tutki niiden tyyppiä ja stabiilisuutta linearisoinnin avulla.

5. Tarkastellaan metallisauvaa, jonka pituus on 1 ja jonka lämpötilaa kuvaa funktio $u(x, t)$, $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$. Sauvan päät pidetään 0 asteen lämpötilassa kaikilla t ja sen alkulämpötila on muotoa
$$u(x, 0) = 100x(1 - x).$$
Aikaskaalauksen jälkeen funktio u toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $u_t = u_{xx}$. Oletetaan tunnetuksi, että sauvan maksimilämpötila saavutetaan sen keskipisteessä kaikilla $t \ge 0$. Kuinka pitkän ajan kuluttua se on laskenut alun 25 asteesta 20 asteeseen? Ratkaise tehtävä
a) käyttämällä palautuskaavaa
$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j})$$
ja jakoväliä $\Delta x = 0{,}1$, jolloin $\Delta t = 0{,}005$.
b) korvaamalla alkutila sen Fourier-approksimaatiolla
$$100x(1 - x) \approx \frac{800}{\pi^3} \sin(\pi x), \quad 0 \le x \le 1,$$
ja käyttämällä yleistä ratkaisua
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$