Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta/Ruotsalainen

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Välikoe 3 18.12.2007

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Funktiolla
$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{2x - 3}$$
on kaksi kiintopistettä. Tutki, suppeneeko vai hajaantuuko kiintopisteiteraatio
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$
kun $x_0 \in \mathbb{R}$ on lähellä jompaa kumpaa kiintopistettä. Suppenevassa tapauksessa tutki myös suppenemisen asymptoottinen laatu.

2. Janaa, jonka pituus on $a = 5$ (vakio), liikutetaan siten, että janan toinen päätepiste P liikkuu pitkin negatiivista x-akselia ja toinen päätepiste Q pitkin käyrää $y = x^2$. Eräällä hetkellä Q:n x-koordinaatti $= 2.003$. Käyttäen differentiaalia, laske P:n x-koordinaatti kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

3. Yhtälö
$$y^3 + e^{xy} + x \sin x + x = 0$$
määrittelee pisteen $x = 0$ ympäristössä funktion $y(x)$. Määritä implisiittisellä derivoinnilla ko. funktion toisen asteen Taylorin polynomi $T_2(x, 0)$. Onko piste $x = 0$ funktion $y(x)$ paikallinen ääriarvokohta ja jos, niin millainen?

4. (a) Todista Taylorin lauseen avulla väittämä: Jokaisella reaaliluvulla $x > 0$ pätee
$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1 + x) < x.$$

   (b) Käyttäen (a)-kohdan tulosta arvioi approksimaation $(1 + \frac{1}{n})^n/e \approx 1$ virhe, kun $n = 500$.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan

Pitkäranta/Ruotsalainen

Mat-1.1010 Grundkurs L1

Mellanförhör 3 18.12.2007

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. Funktionen
$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{2x - 3}$$
har två fixpunkter. Undersök huruvida fixpunktsiterationen
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$
konvergerar eller divergerar, då $x_0 \in \mathbb{R}$ är nära endera fixpunkten. I händelse av konvergens undersök även konvergensens asymptotiska natur.

2. Ett linjesegment, vars längd är $a = 5$ (konstant), förflyttas så att dess ena ändpunkt P rör sig längs negativa x-axeln och den andra ändpunkten Q längs kurvan $y = x^2$. I ett visst ögonblick är Q:s x-koordinat $= 2.003$. Använd differentialen till att beräkna P:s x-koordinat med tre signifikanta siffror.

3. Ekvationen
$$y^3 + e^{xy} + x \sin x + x = 0$$
bestämmer en funktion $y(x)$ i omgivningen av punkten $x = 0$. Med hjälp av implicit derivering bestäm 2:a gradens Taylor-polynom $T_2(x, 0)$ till denna funktion. Är punkten $x = 0$ en lokal extrempunkt för funktionen $y(x)$? Om så är fallet, hurudan extrempunkt är det?

4. (a) Bevisa följande påstående med hjälp av Taylors sats: För varje reellt $x > 0$ gäller att
$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1 + x) < x.$$
(b) Använd resultatet i (a)-delen för att uppskatta felet i approximationen $(1+\frac{1}{n})^n/e \approx 1$, då $n = 500$.