Teknillinen korkeakoulu Nevanlinna
Mat-1.015, Modernin analyysin perusteet
Tentti, 12.1. 2001

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!
Koulutusohjelmalyhenteet: AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH

1. Funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ on määritelty seuraavasti:

$$f(z) := \frac{17}{3 + 8|z|} \ .$$

Onko f tasaisesti jatkuva $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$?
Todista väitteesi.

2. Annettuna on jatkuvat funktiot f, g: $[0,1] \to \mathbb{R}$. Johda Schwarzin (Cauchy–Schwarz–Bunjakovskin) epäyhtälö

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

3. Laske ja esitä tarkka perustelu:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\alpha} \frac{(1 - x^4)^n}{\sqrt{x}} \ dx$$

kun $\alpha = 1.1$.

4. Tarkastellaan joukkoa $\mathbb{R}$ metrisenä avaruutena varustettuna normaalimetriikalla $d(x,y) = |x - y|$.
   (a) Ovatko kaikki rajoitetut Borel–joukot, jotka eivät ole avoimia, kompakteja? Perustele!
   (b) Toinen metriikka $\hat{d}$ on d:n kanssa **ekvivalentti**, mikäli

$$\exists \ C > 0 \text{ siten, että } \frac{1}{C} \ d(x,y) \ \leq \ \hat{d}(x,y) \ \leq \ C \ d(x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \ .$$

Anna joku tällainen $\hat{d}$ ja todista että se on metriikka, näytä ekvivalenssi ja näytä, että $\hat{d} \neq d$.

5. Annettuna $\mathcal{D}'$:ssä suppeneva jono distribuutioita $\{\Lambda_j\} \subset \mathcal{D}'$:

$$\Lambda_j \ \xrightarrow{\mathcal{D}'} \ \Lambda \in \mathcal{D}' \ .$$

Esitä distribuutioiden derivoinnin määrittely ja todista että

$$D\Lambda_j \ \xrightarrow{\mathcal{D}'} \ D\Lambda \ .$$