

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Tentti 09.01.2008

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 4h.

1. Laske seuraaville integraaleille joko tarkka arvo (jos mahdollista) tai rationaalinen likiarvo, jonka virhe on enintään 10^{-4} :

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \quad \text{b) } \int_{10^{-4}}^1 \frac{1 - \cos x}{x^4} dx$$

2. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut:

$$\text{a) } y' = \frac{y}{x-y} \quad \text{b) } x^2 y'' - 4xy' - 6y = \frac{1}{x}$$

3. Yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x^3 + xy + 2y^3 = u \\ \sqrt{2+xy} - e^{x+y^2} = v \end{cases}$$

on ratkaisu $(x, y) = (-1, 1)$, kun $u = v = 0$.

- (a) Päättele (johonkin tunnettuun lauseeseen vedoten), että yhtälöryhmällä on pisteen $(-1, 1)$ lähellä yksikäsitteinen ratkaisu aina kun $u^2 + v^2$ on riittävän pieni
- (b) Laske likimääräinen ratkaisu kun $u = 0.1$ ja $v = -0.1$ iteroimalla kerran Newtonin menetelmällä alkuarvauksesta $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.
4. Millä vakioiden a, b ja c arvoilla funktiolla $f(x, y) = ax + by + cxy + \cos(x - y) + \sin(x + y)$ on origossa paikallinen maksimi?
5. Laske pallokoordinaatteihin siirtymällä

$$\int_A x^3 y z \, dx dy dz,$$

kun $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 12 \text{ \& } x, y, z \geq 0\}$.