

Mat-1.1020 Grundkurs L2

Examen 09.01.2008

Fyll i tydligt på varje svarpapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 4h.

1. Laske seuraaville integraaleille joko tarkka arvo (jos mahdollista) tai rationaalinen likiarvo, jonka virhe on enintään 10^{-4} :

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \quad \text{b) } \int_{10^{-4}}^1 \frac{1 - \cos x}{x^4} dx$$

2. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut:

$$\text{a) } y' = \frac{y}{x-y} \quad \text{b) } x^2 y'' - 4xy' - 6y = \frac{1}{x}$$

3. Yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x^3 + xy + 2y^3 = u \\ \sqrt{2 + xy} - e^{x+y^2} = v \end{cases}$$

on ratkaisu $(x, y) = (-1, 1)$, kun $u = v = 0$.

- (a) Päättele (johonkin tunnettuun lauseeseen vedoten), että yhtälöryhmällä on pisteen $(-1, 1)$ lähellä yksikäsitteinen ratkaisu aina kun $u^2 + v^2$ on riittävän pieni
- (b) Laske likimääräinen ratkaisu kun $u = 0.1$ ja $v = -0.1$ iteroimalla kerran Newtonin menetelmällä alkuarvauksesta $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

4. Millä vakioiden a, b ja c arvoilla funktiolla $f(x, y) = ax + by + cxy + \cos(x - y) + \sin(x + y)$ on origossa paikallinen maksimi?

5. Laske pallokoordinaatteihin siirtymällä

$$\int_A x^3 y z \, dx dy dz,$$

kun $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 12 \text{ \& } x, y, z \geq 0\}$.