

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!
Funktioalaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!*

1.

(a) Määritä $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ kun $y(t)$ on differentiaaliyhtälön

$$y'(t) = \frac{1}{1 + y(t)^2} (y(t)^2 - 1)(3 - y(t)), \quad y(0) = 0,$$

ratkaisu. (Älä ratkaise tätä yhtälöä!)

(b) Toteuttaako $u(t) = y(t) + t^2$ separoituvan differentiaaliyhtälön jos $y(t)$ on yhtälön

$$y'(t) = \frac{y(t) + (t-1)^2 - 1}{y(t) + t^2 + 1},$$

ratkaisu? (Yhtälöitä ei tarvitse ratkaista!)

2. Ratkaise alkuarvoprobleema

$$y''(t) + 6y'(t) + 45y(t) = 306 \cos(6t), \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 36.$$

3. Ratkaise likimääräisesti differentiaaliyhtälö $y'(x) - (x + y(x))^2 = 0$, $y(0) = 1$ Runge-Kuttan (4. kertaluvun) menetelmällä laskemalla yksi askel askelpituudella $h = 0.2$. Tässä Runge-Kuttan menetelmässä lasketaan

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + ?h, y_n + \frac{1}{2}k_1),$$

$$k_3 = ???$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{7}(k_1 + ?k_2 + ?k_3 + k_4),$$

missä ?-merkit on korvattava sopivilla luvuilla ja/tai lausekkeilla. Selitä (lyhyesti) millä tavalla virheen suuruutta voidaan arvioida, kun lasketaan näin.

4.

(a) Määritä potenssisarjan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{n^4} x^{4n}$ suppenemissäde.

(b) Tiedetään, että potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ suppenemissäde on 3. Supeneeko (termittäin derivoimalla saatu) potenssisarja $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$, kun $x = -2$, $x = 2$ tai $x = 6$?

Vastaa kotisivulla olevaan kurssikyselyyn!

Hyvää kevään jatkoa!