8. Millä α:n arvoilla matriisi $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$ on diagonalisoituva?

9. Etsi $\sup\limits_{t\in(0,\infty)} \frac{1}{t} \log \|e^{t\boldsymbol{A}}\|$, kun $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$.

10. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 - x_1^3 - x_2 \end{cases}$$

tasapainopisteet ja linearisoi systeemi näissä. Minkä laatuisia lineaariset systeemit ovat? Voidaanko näiden perusteella päätellä alkuperäisen systeemin käyttäytyminen tasapainopisteiden ympäristössä? Hahmottele piirroksella systeemin käyttäytyminen.

11. Tarkastellaan gradienttisysteemiä $\boldsymbol{x}'(t) = -\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x}(t))$, missä $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Näytä, että tällä ei ole periodisia ratkaisuja.

12. Tarkastellaan tehtävän $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0$ numeerista ratkaisemista. Olkoon arvot $\boldsymbol{x}^j \approx \boldsymbol{x}(jh)$, $j = 1, \ldots, k$ laskettu jollain tavoin. Tutki seuraavanlaista menetelmää: olkoon $\boldsymbol{p}$ toisen asteen polynomi, jolle pätee

$$\boldsymbol{p}(-h) = \boldsymbol{x}^{k-1}, \quad \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{x}^k, \quad \boldsymbol{p}'(h) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{k+1}).$$

$\boldsymbol{x}^{k+1}$:tä ei tiedetä, vaan sille saadaan yhtälö asettamalla $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{p}(h)$.

a) Kirjoita näin määritelty menetelmä muodossa

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \alpha_0 \boldsymbol{x}^k + \alpha_1 \boldsymbol{x}^{k-1} + h\beta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{k+1}).$$

b) Mikä on menetelmän kertaluku lineaariselle yhtälölle $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$?