

Mat-1.175 Numeerinen matriisilaskenta

Tentti 14.5.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ja $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$. Osoita että \mathbf{A} :n QR-hajoitus $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ on yksikäsitteinen, kun matriisilta $\mathbf{R} = (r_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lisäksi vaaditaan, että $r_{ii} > 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.
2. Osoita että jokaiselle neliömatriisille \mathbf{A} pätee $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}^T$.

Vihje: Osoita ensin, että

$$\mathbf{J}_k(\lambda) \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & \ddots & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & \ddots & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \mathbf{J}_k(\lambda)^T.$$

3. Tiedetään, että hermiittisellä matriisilla \mathbf{A} on ominaisarvo -1 ja että $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{u}^*$ on positiivisesti definiitti eräällä $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$. Näytä, että \mathbf{A} on invertoituva.
4. Matriisin \mathbf{A} spektrin tiedetään olevan välillä $[a, b]$, $0 < a < b$. Tarkastellaan iteraatiota $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k)$, missä $\mathbf{M} = \mu((a+b)\mathbf{I} - \mathbf{A})$.
 - (a) Millä μ :n arvoilla iteraation voi taata suppenevan?
 - (b) Millä μ :n arvolla (taattu) suppeneminen on nopeinta?

Tentin tuloksesta ilmoitetaan sen valmistuttua sähköpostitse.