

Mat-2.111 Stokastiset prosessit

Tentti 7.5.2005

Tentissä saa käyttää kaavakokoelmaa ja graafista laskinta.

Poropudas

Kirjoita koepaperellin selvästi seuraavat tiedot:

- Mat-2.111 Stokastiset prosessit, tentti 7.5.2005
- opiskelijanumero, TEKSTATEN sukunimi, etunimet, puhuteltuani alioivattuna
- koulutusohjelma (ei osasto), vuosikursi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelma
- nimekirjoitus

1. Diskreetin satunnaismuuttujan X jakaumalle määritellään *todennäköisytyt gene-roiva funktio* seuraavasti:

$$\gamma_X(t) := \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n t^n,$$

missä N on X :n mahdollisten arvojen joukko ja $p_n = P(X = n)$. Miten X :n odotusarvo voidaan laskea $\gamma_X(t)$:n avulla?

2. Yksinkertaisessa noppapelaamisessa pelaja heittää ensin kerran kahra noppaa, joiden silmäluokien summa on ns. tavoite. Tämän jälkeen pelaja heittää kahra noppaa yrittäen saada silmäluokien summaksi tavoitearvon, kunnes pelaja onnistuu tai summa on seitsemän. Pelaja voittaa, jos hän saa tulokseksi tavoitteen ennen seitsemää. Jos nolla tahansa heittoa vuorolla (myös ensimmäisellä!) silmäluokien summa on seitsemän, pelaja häviää. Millä todennäköisyydellä pelaja voittaa, jos ensimmäisellä heitolla tulokseksi tulee $2 + 2 = 4$?

3. Olkoon $N(t)$ Poisson-prosessi intensiteetillä 2. Laske seuraavat ehdolliset todennäköisyydet:

- a) $P(N(3) = 4 \mid N(1) = 1)$,
- b) $P(N(1) = 1 \mid N(3) = 4)$.

4. Kolme koripalloilijaa heittelee palloa korin. Ensimmäinen heittää niin monta kertaa kunnes tulee ensimmäinen ohheilto, sitten toinen heittää kunnes heitto menee ohi.

Tämän jälkeen kolmas heittää kunnes epäonnistuu ja prosessi alkaa alusta. Oletetaan, että pelaajien heitot ovat riippumattomia ja pelaajien onnistumistodennäköisyydet ovat $p_1 = 2/3$, $p_2 = 1/2$ ja $p_3 = 3/4$. Esitä kolmen pelaajan heitelytilanne nusitumisprosessina. Kuinka suuren osan ajasta kukin koripalloilijasta on heitovuorossa, kun heitelyä jatketaan äärettömän kauan?

5. *2-ulotteinen satunnaiskulku*. Toomas laittaa kirpua 3×3 -kokoiselle ruudukolle ("jätkäshakkilaudalle"). Kirppuun iskee intensiteetillä λ vinnattu tarve loikata pois tämänhetkisestä ruudustaan ja se ponnaa satunnaisesti johonkin viereisistä ruuduista. Myös viinon loikkaaminen on mahdollista ja laudalla ei ole poispääsyä, joten ensin nurkkaruudusta pääsee siis vain kolmeen viereiseen ruutuun. Laske tasapainojakauma todennäköisyyksille, joilla kirppu on kussakin laudan ruudussa pitkän ajan kuluessa. Miten tilanne muuttuu 2×2 -ruudukossa?