Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan laitos

Nevanlinna/Pikkarainen

Mat-1.140 Funktionaalianalyysin perusteet

1. välikoe, 25.10.2003

1. Olkoon X kompleksikertoiminen Banachin avaruus. Silloin $B(X)$ on vektoriavaruus, jossa on määriteltynä normi

$$\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

   a. Määrittele yleinen kompleksikertoiminen Banachin algebra $\mathcal{A}$.

   b. Näytä, että $B(X)$ on Banachin algebra.

2. Olkoon $X := C[0,1]$ Banachin avaruus normilla $\|f\| = \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$. Annetaan lineaarinen operaattori $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Af)(t) = \int_0^t e^{t-s} f(s)\, ds.$$

   a. Näytä, että $A \in B(X)$, ja määrää sen normi $\|A\|$.

   b. Derivoimalla on helppo nähdä, että A on injektio (ei tarvitse todistaa). Onko se surjektio? Perustele!

   c. Mitä voit sanoa A:n käänteisoperaattorin olemassaolosta? Jos A:lla on käänteisoperaattori, niin onko se jatkuva?

3. a. Tarkastellaan kompleksikertoimista Hilbertin avaruutta H ja operaattoria $A \in B(H)$. Määrittele käsitteet

   (i) A on unitaarinen,

   (ii) A on isometria,

   (iii) A on normaali.

   b. Tarkastellaan Hilbertin avaruutta l_2, jossa on annettu siirto eteen

$$S : x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto Sx = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

   Onko S unitaarinen, isometria, normaali? Perustele!