Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Somersalo

Mat-1.198 Sirontateoria (Scattering theory)

Tentti 20.5.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

1. Tarkastellaan sirontaa akustisesti pehmeästä, rajoitetusta, sileäreunaisesta kappaleesta $D \subset \mathbb{R}^3$, jonka komplementti on yhtenäinen. Olkoon $u_{\rm inc}$ tunnettu sisääntuleva kenttä, ts. jokin koko avaruuden Helmholtzin yhtälön

$$(\Delta + k^2)u_{\rm inc} = 0$$

ratkaisu. Etsitään Sommerfeldin säteilyehdon toteuttavaa sironnutta kenttää $u_{\rm sc}$, jolle $u = u_{\rm inc} + u_{\rm sc}$ toteuttaa ulkoalueen Helmholtzin yhtälön ja Dirichlet'n reunaehdon,

$$(\Delta + k^2)u(x) = 0 \quad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\text{:ssä}, \quad u\big|_{\partial D} = 0.$$

(a) Lähtien Helmholtzin esityslauseesta osoita, että

$$u_{\rm sc}(x) = \int \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\,dS(y).$$

(b) Johda integraaliesitys sironneen kentän kaukokentälle u_∞.

(c) Millainen on Bornin approksimaation kaukokentän integraaliesitys?

2. Tarkastellaan akustista sirontaa pehmeästä sileäreunaisesta rajoitetusta sirottajasta $D \subset \mathbb{R}^3$, jonka komplementti on yhtenäinen:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\text{:ssä}, \quad u\big|_{\partial D} = 0.$$

Oletetaan, että aalto on muotoa $u = u_{\rm inc} + u_{\rm sc}$, missä $u_{\rm inc}$ on koko avaruudessa Helmholtzin yhtälön toteuttava tunnettu kenttä.

Etsitään sironnutta kenttää yritteellä

$$u_{\rm sc}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi}{\partial n(y)}(x-y)\psi(y)\,dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

Minkä yhtälön tiheyden ψ tulee toteuttaa? Miten yhtälön ratkeavuus liittyy sisäalueen ongelman ratkaisuihin eli ns. resonansseihin?

3. Tarkastellaan sirontaongelmaa, jossa haetaan ratkaisua $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ yhtälölle

$$(\Delta + k^2)u = qu$$

muodossa $u = u_{\rm inc} + u_{\rm sc}$, missä $u_{\rm inc}$ on tunnettu Helmholtzin yhtälön ratkaisu ja $u_{\rm sc}$ toteuttaa Sommerfeldin säteilyehdon äärettömyydessä. Oletetaan, että q on jatkuva kompleksinen potentiaali, $q(x) = 0$ rajoitetun joukon $D \subset \mathbb{R}^3$ ulkopuolella. Osoita, että jos ${\rm Im}\, q \leq 0$, niin sirontaongelmalla on enintään yksi ratkaisu.

(Vihje: Osoita, että jos $u_{\rm inc} = 0$, niin sirontaehto implikoi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|=R} |u_{\rm sc}(x)|^2 dx = 0.$$

Muotoile myös Rellichin lemma tai Rellichin lause. Todistaa ei tarvitse. Lisäksi tarvitset ns. yksikäsitteisen jatkamisen periaatteen:

Olkoon $G \in \mathbb{R}^n$ alue. Jos funktio $u \in C^2(G)$ toteuttaa ehdon

$$|\Delta u| \leq C(|u| + |\nabla u|), \quad C > 0$$

G:ssä, ja $u = 0$ jossain G:n avoimessa osajoukossa, niin $u = 0$ koko G:ssä.)

4. Tarkastellaan kaksiulotteista akustista aaltojohtoa: Akustinen aalto kulkee alueessa $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1\}$. Aaltojohdon seinät oletetaan akustisesti pehmeiksi. Akustinen aalto toteuttaa reuna-arvotehtävän

$$\Delta u + k^2 u = qu \quad S\text{:ssä}, \quad u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0,$$

missä potetiaali $q = q(x,y)$ kuvaa sirottajaa. Oletetaan, että ${\rm supp}\, q \subset \{(x,y) \in S \mid 0 < x < 1\}$.

(a) Oletetaan aluksi, että $q = 0$. Käyttäen muuttujien separointia osoita, että johdossa voi edetä akustinen aalto vain, jos $k > \pi$. Mikä on yleinen muoto oikealle etenevälle sisääntulevalle aallolle?

(b) Olkoon nyt $q \neq 0$. Kirjoita muuttujien separointia käyttäen ratkaisun yleinen muoto alueessa $x < 0$ ja $x > 1$. Yhdistettynä a-kohdan tulokseen tämä antaa lausekkeen sironneelle kentälle.

(c) Oletetaan, että kentät halutaan laskea numeerisesti, ja ääretön aaltojohto katkaistaan käyttämällä PML-venytystä x–koordinaatin suhteen alueissa $x < 0$ ja $x > 1$. Kirjoita PML-yhtälö alueissa $x < 0$ ja $x > 1$. Erityisesti, oletetaan, että venytysfunktio on sellainen, että sen derivaatta suurilla $|x|$:n arvoilla on kompleksinen vakio. Miten PML-ratkaisu käyttäytyy, kun $x \to \pm\infty$?