Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Mat-1.402 Peruskurssi L1

Tentti 20.1.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 4h.

1. Muotoile (väittämänä) Bernoullin epäyhtälö ja todista se induktiolla.
2. Helsingistä ($60°$ N, $25°$ E) lennetään lyhintä tietä Tokioon ($36°$ N, $140°$ E). Mihin ilmansuuntaan on Helsingistä lähdettävä?
3. Tutkimalla tasa-arvopintoja, määritä funktion $x - 2y + 2z + 3$ pienin ja suurin arvo tynnyrissä
$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 3 \}$$
4. Käyttäen numeerisissa laskuissa Newtonin menetelmää, laske neljän desimaalin tarkkuudella funktion $f(x) = \min\{x, e^{-2x}\}$, $x \in \mathbb{R}$, maksimiarvo ja f:n Lipschitz-vakion pienin arvo välillä $[0, 1]$.
5. Funktio
$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \ln|1 + 2x|, & \text{kun } x \neq 0, -1/2 \\ a, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$
on eräällä vakion a arvolla origon ympäristössä jatkuva ja mielivaltaisen monta kertaa jatkuvasti derivoituva. Määritä a, f:n Taylorin sarja origossa ja sarjan suppenemissäde.

Institutionen för matematik
Tekniska högskolan Institute of mathematics
Helsinki University of Technology

Mat-1.402 Peruskurssi L1

Tentti 20.1.2003

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordiningsnummer. ⋆-rutan lämnas tom. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO. Please fill in clearly *on every sheet* the data on you and the examination. On *Examination code* mark course code, title and text mid-term or final examination. ⋆-box is left empty. Study programmes are ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Funktionsräknare är tillåtna

1. Formulera Bernoullis olikhet (som ett påstående) och bevisa den med hjälp av induktion.
2. Vi flyger kortaste vägen från Helsingfors ($60°$ N, $25°$ E) till Tokyo ($36°$ N, $140°$ E). I vilket väderstreck flyger vi, då vi startar från Helsingfors?
3. Bestäm största och misnsta värdet hos funktionen $x - 2y + 2z + 3$ i området
$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 3 \}$$
genom att studera nivåytor.
4. Använd Newtons metod i de numeriska beräkningarna för att beräkna maximivärdet hos funktionen $f(x) = \min\{x, e^{-2x}\}$, $x \in \mathbb{R}$, med fyra decimalers noggrannhet samt minsta värdet hos f:s Lipschitz-konstant i intervallet $[0, 1]$.
5. Funktionen
$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \ln|1 + 2x|, & \text{kun } x \neq 0, -1/2 \\ a, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$
är för ett visst värde på konstanten a kontinuerlig och godtyckligt många gånger kontinuerligt deriverbar i en omgivning av origo. Bestäm a, f:s Taylor-serie i origo samt seriens konvergensradie.