

## Mat-1.423 Matematiikan peruskurssi L3

tentti 27.1.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ★-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

1. Tarkastellaan funktiota

$$z \mapsto \frac{z^2 - 2z + a}{z - 2}.$$

- (a) Määrä funktion erikoispisteen  $z = 2$  tyyppi ( $a \in \mathbb{C}$  on parametri, ja voi siis saada eri arvoja).
- (b) Kehitä funktio Laurentin sarjaksi alueessa  $\{z \mid |z - 1| > 1\}$ , kun  $a = 3$ .

2. Merkitään analyttisen funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  nollakohtien joukkoa

$$Z(f) = \{a \in \mathbb{C} \mid a \in \Omega \text{ ja } f(a) = 0\}.$$

Luennolla todistettiin seuraava lause, josta (iv) on tarkoituksella jätetty pois:

Lause 4.1.1. Olkoon annettu analyttinen funktio alueessa  $\Omega$ . Silloin täsmälleen yksi seuraavista vaihtoehdoista on voimassa:

- (i)  $Z(f) = \emptyset$
- (ii)  $Z(f) = \Omega$
- (iii)  $Z(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$
- (iv) □
- (a) Täydennä (iv).
- (b) Anna esimerkki alueesta  $\Omega$  ja funktiosta  $f$  jokaisessa tapauksessa (i), (ii), (iii) ja (iv).

3. Olkoon  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Määritellään lineaarikuvaus

$$L : V \rightarrow V, \quad L(A) = AM - MA.$$

Etsi kannat avaruuksille  $N(L)$  ja  $R(L)$ .

4. Millä  $\alpha \in \mathbb{R}$  arvolla matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2-normissa mitattu häiriöalttius  $\kappa_2(A)$  on pienin?

**KÄÄNNÄ!**