

Mat-1.403 Matematiikan peruskurssi L3

3. Välikoe 12.12.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. *-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Tarkastellaan \mathbb{R}^2 :ssa differentiaaliyhtälösystemiä

$$\mathbf{x}' = (1 + \|\mathbf{x}\|^2)\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \text{missä} \quad \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{ja} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Määrä systemin tasapainopisteet.
- (b) Todista, että $\|\mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{a}\|$, kun $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$.
- (c) Määrittele käsitteet stabiili ja asymptoottisesti stabiili tasapainopiste.
- (d) Määrä systemin tasapainopisteiden lajit.

2. Tarkastellaan \mathbb{R}^2 :ssa differentiaaliyhtälösystemiä $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, missä \mathbf{f} on kuvaus

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -|x_1|x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Onko \mathbf{f} Lipschitz-jatkuva koko \mathbb{R}^2 :ssa? Perustele.
- (b) Ratkaise tehtävä $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ alkuarvolla

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \text{missä} \quad a > 0.$$

- (c) Esitä Picard-Lindelöf -iteraatio alkuarvot tehtävän ratkaisemiseksi ja laske kolme ensimmäistä iteraattia \mathbf{x}^0 , \mathbf{x}^1 ja \mathbf{x}^2 .

3. (a) Olkoot $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Mitä tarkoitetaan sillä, että ohjaussysteemi

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}^k + \mathbf{b}u_k$$

on täydellisesti ohjattava?

- (b) Onko ohjaussysteemi $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}^k + \mathbf{b}u_k$ täydellisesti ohjattava, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ?$$