Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.015 Modernin analyysin perusteet
2. välikoe maanantaina 14.4.2003

Nevanlinna / Maasalo

Kirjoita selvästi jokaiseen vastauspaperiin henkilötietosi ja koulutusohjelmasi, ja palauta joka tapauksessa ainakin yksi tiedoillasi varustettu paperi.

1. Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus. Tarkastellaan X:n mitallisia funktioita $f \in M$.
   (a) Näytä suoraan mitallisuuden määritelmän perusteella, että jos $f \in M$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin $cf \in M$.
   (b) Todista, että mitallisten reaalifunktioiden välille määritelty relaatio
   $$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$$
   on ekvivalenssi.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mitallinen joukko, ja χ_A joukon A karakteristinen funktio. Todista, että jos χ_A on melkein kaikkialla yhtä suuri jonkin jatkuvan funktion kanssa, niin joko A on nollamitallinen tai $\mathbb{R} \backslash A$ on nollamitallinen.

   Vihje: Saat käyttää hyväksesi seuraavaa:

   Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $\exists x, y \in \mathbb{R}$ s.e. $f(x) = a, f(y) = b$, niin $\forall c \in [a, b] \subset \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}$ s.e. $f(z) = c$.

3. Olkoon annettuna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus ja mitallinen funktio $f : E \subset X \to \mathbb{R}$, missä $\mu(E) < \infty$. Asetetaan $g_k : E \to \mathbb{R}$,
   $$g_k(x) = \frac{kf(x)}{1 + k^2 f(x)^2}.$$
   Määrää
   $$\lim_{k \to \infty} \int_E g_k \, d\mu.$$
   Perustele!

4. Fatoun lemma voidaan esittää seuraavassa muodossa:

   Olkoon $E \in \mathcal{M}$, $\{f_n\} \subset M$, $f_n \geq 0$. Asetetaan
   $$f := \liminf f_n.$$
   Silloin
   $$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n.$$
   Muotoile monotonisen suppenemisen lause ja todista sen avulla Fatoun lemma.