Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Pitkäranta

Mat-1.401 Peruskurssi L1

3. välikoe 12.12.2002

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. ⋆-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä. Koeaika on 3h.

1. Funktio $y = y(x)$ määritellään toisen funktion f avulla seuraavasti:

$$y = y(x) \Leftrightarrow y + e^y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tutki implisiittisen derivoinnin avulla, onko funktiolla $y(x)$ paikallista minimiä tai maksimia origossa, kun

$$\text{a)}\ f(x) = 1 + x\cos x \qquad \text{b)}\ f(x) = \cos x.$$

2. Funktiolla

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{2x - 3}$$

on kaksi kiintopistettä. Tutki, suppeneeko vai hajaantuuko kiintopisteiteraatio

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2\ldots,$$

kun $x_0 \in \mathbb{R}$ on lähellä jompaa kumpaa kiintopistettä. Suppenevassa tapauksessa tutki myös suppenemisen asymptoottinen laatu.

3. a) Määritä ruuviviivan

$$\vec{\mathbf{r}}(\varphi) = \cos\varphi\vec{\mathbf{i}} + \sin\varphi\vec{\mathbf{j}} + \varphi\vec{\mathbf{k}}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

yksikkötangenttivektori $\vec{\mathbf{t}}(\varphi)$ pisteessä $P(\varphi) \hat{=} \vec{\mathbf{r}}(\varphi)$.

b) Ruuviviivan tangentti pisteessä $P(\varphi)$ on $P(\varphi)$:n kautta kulkeva suora, jonka suuntavektori on $\vec{\mathbf{t}}(\varphi)$. Parametrin φ muuttuessa piirtää tangentin ja xy-tason leikkauspiste $Q(\varphi)$ erään tasokäyrän S. Määritä tämän käyrän parametrisaatio $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$.

c) Laske b-kohdan tasokäyrän S kaarevuussäde käyrän pisteessä, jonka etäisyys origosta $= \sqrt{2}$.
Vihje: Kaava $R = |\vec{\mathbf{r}}'|^3/|\vec{\mathbf{r}}' \times \vec{\mathbf{r}}''|$ toimii myös tasokäyrän tapauksessa.

4. Funktio $f(x) = (\sin(2x) - ax)/x^3$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, voidaan määritellä eräällä a:n arvolla origossa siten, että funktiosta tulee origossa(kin) jatkuva. Mikä on tämä a:n arvo ja mikä on tällöin $f(0)$? Päättele, että näin määritelty funktio voidaan esittää kaikkialla suppenevana potenssisarjana muodossa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Määritä sarjan kertoimet a_k, $k = 0\ldots3$, ja laske $f''(0)$.