

## Mat-1.401 Peruskurssi L1

### Välikoe 3 11.12.03

Täytä selvästi jokaiseen vastauspaperiin kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa saa käyttää funktiolaskinta, ei muita apuvälineitä.

1. Millä  $a$ :n arvoilla funktio

$$f(x) = \begin{cases} x + a & , \quad x \leq a \\ \sqrt{|x|} & , \quad x > a \end{cases}$$

on a) jatkuva, b) Lipschitz-jatkuva välillä  $[-1,1]$ ?

2. Tutki, miten kiintopisteiteraatio  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  suppenee tai hajaantuu asympotoottisesti, kun  $x_0$  on lähellä kiintopistettä ja

$$\text{a) } f(x) = \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt[3]{x+6} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

3. a) Miten määritellään kompleksifunktiot  $\sin z$ ,  $\cos z$  ja  $\cosh z$  ( $z = x + iy \in \mathbb{C}$ )?

b) Etsi yhtälön  $\cosh z = -1$  kaikki ratkaisut kompleksitasosta.

4. a) Funktio  $f$  on mielivaltaisen monta kertaa derivoituva välillä  $(-1, \infty)$  ja muualla kuin origossa pätee  $f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x) + x/2$ ,  $x \in (-1, \infty)$ ,  $x \neq 0$ . Määritä  $f$ :n kolmannen asteen Taylorin polynomi  $T_3(x, 0)$ . Onko  $f$ :llä paikallista minimiä tai maksimia origossa?

b) Arvioi kahden merkitsevän numeron tarkkuudella luku  $e - (1 + \frac{1}{n})^n$  kun  $n = 10^{30}$  ( $e$ =Neperin luku).

1. För vilka värden på  $a$  är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x + a & , \quad x \leq a \\ \sqrt{|x|} & , \quad x > a \end{cases}$$

a) kontinuerlig, b) Lipschitz-kontinuerlig i intervallet  $[-1,1]$ ?

2. Undersök hur fixpunktsiterationen  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  konvergerar eller divergerar asympotiskt, då  $x_0$  är nära fixpunkten och

$$\text{a) } f(x) = \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt[3]{x+6} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

3. a) Hur definieras de komplexa funktionerna  $\sin z$ ,  $\cos z$  och  $\cosh z$  ( $z = x + iy \in \mathbb{C}$ )?

b) Bestäm alla lösningarna till ekvationen  $\cosh z = -1$  i komplexa talplanet.

4. a) Funktionen  $f$  är godtyckligt många gånger deriverbar i intervallet  $(-1, \infty)$  och borta från origo gäller att  $f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x) + x/2$ ,  $x \in (-1, \infty)$ ,  $x \neq 0$ . Bestäm  $f$ :s Taylorpolynom  $T_3(x, 0)$  av tredje graden. Har  $f$  lokalt minimum eller maximum i origo?

b) Beräkna talet  $e - (1 + \frac{1}{n})^n$  med två gällande siffors noggrannhet, då  $n = 10^{30}$  ( $e$ =Nepers tal).