

Täytä henkilötietosi jokaiseen vastauspaperiin (koulutusohjelmien lyhenteet ovat: AUT, TFY, TIK, INF, TUO, EST, TLT, KON, KEM, MAK, PUU, ARK, MAR, GMA, KTA, RYK)
Funktioalaskin on sallittu apuväline tässä kokeessa!

1. a) Osoita, että funktio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; f(z) = z^3$ on analyyttinen koko kompleksitasossa.
b) Määritä kompleksitason osajoukon

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}, z \neq 0\}$$

kuva kuvauksessa f . Piirrä kuva.

- c) Ratkaise yhtälö $f(z) = i$.

2. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}; f(z) = \frac{3}{1-z}$.

- a) Määritä funktion f Taylorin sarja 0:ssa.
b) Määritä a)-kohdan Taylorin sarjan suppenemissäde.
c) Laske integraali

$$\int_C f(z) dz,$$

kun $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 2\}$ kierrettynä yhden kerran vastapäivään.

3. Tarkastellaan kuvausta $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; L(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 + x_2)$.

- a) Osoita, että L on lineaarinen ja määritä sen ydin $N(L) = \text{Ker}(L)$ ja kuva $R(L) = L(\mathbb{R}^3)$.
b) Onko L injektio? Entä surjektio?

4. a) määrittele mitä tarkoitetaan funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Fourier-muunnoksella.
b) Laske funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

5. Tarkastellaan aaltoyhtälöä

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

missä $0 \leq x \leq L$ ja $t \geq 0$. Etsi yhtälölle ratkaisu, joka toteuttaa sekä reunaehdot

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0 \text{ kaikilla } t$$

että alkuehdon

$$u(x, 0) = f(x) \text{ kaikilla } x \in [0, L].$$