

Mat-1.1010 Peruskurssi L1

Välikoe 2 19.11.2007

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Euklidisen avaruuden E^3 kolme eri pistettä A, B, C sijaitsevat avaruuden R -säteisellä ympyräiivalla siten, että jana AC on ympyrän halkaisija (eli janan pituus = $2R$). Näytä vektorialgebran avulla, että kulma $\angle ABC$ on suora kulma.
2. Tetraedrin kärkipisteet ovat karteesisen koordinaatiston origo O sekä pisteet $A = (3, 2, 2)$, $B = (-1, -2, 0)$ ja $C = (-3, 0, 2)$. Laske a) tetraedrin tilavuus, b) $\cos \alpha$, missä α on tetraedrin sivutahkojen OAB ja OAC muodostama diedrikulma eli kulma, jonka tahdot näyttävät muodostavan, kun niitä katsotaan särmän OA suunnassa.
3. a) Tiedetään, että $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ja $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. Perustele kaava

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta}.$$

- b) Määritä polynomin $p(z) = z^2 + (2 + 2i)z + 4 - i$ nollakohdat perusmuodossa $x + iy$, missä x ja y ovat tarkkoja (geometrisia) lukuja.

4. Rinnemaastossa maaston korkeus meren pinnan tasosta $z = 0$ on

$$z = h(x, y) = 200 + \frac{1}{400}(xy - x^2 - 80x - 40y) \quad (\text{pituusyksikkö} = \text{m})$$

Rinteen pisteessä $P = (0, 0, 200)$ oleva metsästäjä ampuu metsästysjousella nuolen vaaka-suoraan suuntaan $3\vec{i} + 4\vec{j}$. Lennon aikana hetkellä t (yksikkö = s) nuoli on pisteessä, jonka paikkavektori on $\vec{r}(t) = 60t\vec{i} + 80t\vec{j} + (200 - 5t^2)\vec{k}$. Lento päättyy nuolen osuessa maaahan pisteessä Q . Laske Q :n koordinaatit x, y, z .

Mat-1.1010 Grundkurs L1

Mellanförhör 2 19.11.2007

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Utbildningsprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. Tre punkter A , B och C i det euklidiska rummet E^3 befinner sig på en cirkelbåge med radien R i rummet så att linjesegmentet AC är cirkelns diameter (dvs. linjesegmentet har längden $2R$). Visa med hjälp av vektoralgebra, att vinkeln $\angle ABC$ är en rät vinkel.
2. Tetraederns hörnpunkter är origo O i det kartesiska koordinatsystemet samt punkterna $A = (3, 2, 2)$, $B = (-1, -2, 0)$ och $C = (-3, 0, 2)$. Beräkna a) tetraederns volym, b) $\cos \alpha$, där α är diedervinkeln mellan tetraederns sidoytor OAB och OAC dvs. vinkeln, som sidoytorna ser ut att bilda, då man tittar på dem i riktningen som ges av kanten OA .
3. a) Man vet, att $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ och $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. Motivera formeln

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \beta}{1 + \cos \beta}.$$

- b) Bestäm nollställena hos polynomet $p(z) = z^2 + (2 + 2i)z + 4 - i$ på grundformen $x + iy$, där x ja y är exakta (geometriska) tal.

4. Markens höjd över havsytan $z = 0$ ges i ett sluttande landskap av

$$z = h(x, y) = 200 + \frac{1}{400}(xy - x^2 - 80x - 40y) \quad (\text{längdenheten} = \text{m})$$

I punkten $P = (0, 0, 200)$ på slutningen står en jägare och skjuter en pil horisontellt i riktningen $3\vec{i} + 4\vec{j}$. Under flykten befinner sig pilen vid tiden t (enhet = s) i punkten, vars positionsvektor är $\vec{r}(t) = 60t\vec{i} + 80t\vec{j} + (200 - 5t^2)\vec{k}$. Flykten upphör då pilen slår i marken i punkten Q . Bestäm Q :s koordinater x, y, z .