Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Eirola / Palovaara

Mat-1.404 Matematiikan peruskurssi L4

tentti 16.5.2003

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kuulustelukoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. $\star$-kohta jätetään tyhjäksi. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, EST, INF, KEM, KON, MAA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TIK, TLT, TUO.

Tehtävät 1-2 ovat 1. välikokeen, tehtävät 3-4 2. välikokeen ja tehtävät 5-6 3. välikokeen alueelta. Jos olet korvaamassa välikoesuoritusta, merkitse tämä selvästi jokaiseen vastauspaperiisi, ja laske (ainakin) kyseisen välikoealueen tehtävät. Laskimen käyttö on kielletty.

1. Olkoon $\alpha > 0$. Tarkastellaan ominaisarvotehtävää
$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & x \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \ u(1) + a u'(1) = 0. \end{cases}$$
Mikä yhtälö ominaisarvojen on toteutettava? Näytä, että tällä on äärettömästi ratkaisuja.

2. Olkoon $|\mu| < 1$ ja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \cos(3kx)$, $x \in [-\pi, \pi]$. Näytä, että tämä sarja suppenee tasaisesti. Laske myös $\|f\|_2$.

3. Olkoon $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ ja $h(\boldsymbol{x}) \leq 0$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Olkoon u tehtävän
$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(0, x_2) = u(x_1, 0) = 0, \\ u(1, x_2) = x_2, \ u(x_1, 1) = x_1, \end{cases}$$
ratkaisu. Osoita jompikumpi seuraavista oikeaksi:
$$\text{(a)} \quad u(\boldsymbol{x}) \leq x_1 x_2, \qquad \text{(b)} \quad u(\boldsymbol{x}) \geq x_1 x_2,$$
kaikilla $\boldsymbol{x} \in \Omega$. (Toinen ei välttämättä päde.)

4. Etsi sarjamuotoinen ratkaisu tehtävälle
$$\begin{cases} u_t(\boldsymbol{x}, t) = \alpha \Delta u(\boldsymbol{x}, t), & |\boldsymbol{x}| < 1, \ t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{x}, t) = 0, & |\boldsymbol{x}| = 1, \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = f(|\boldsymbol{x}|), & |\boldsymbol{x}| < 1, \end{cases}$$
missä $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

5. Olkoon u tehtävän
$$\begin{cases} u_{tt}(\boldsymbol{x}, t) = c^2 \Delta u(\boldsymbol{x}, t), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \ t > 0, \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \ u_t(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x}), \end{cases}$$
ratkaisu. Tiedetään, että $|g(\boldsymbol{x})| \leq 1$, kun $|\boldsymbol{x}| < 1$ ja $g(\boldsymbol{x}) = 0$, kun $|\boldsymbol{x}| \geq 1$. Olkoon $|\boldsymbol{x}_0| = R > 1$. Määrää $t_0 > 0$ siten, että $u(\boldsymbol{x}_0, t) = 0$, kun $t \in [0, t_0]$. Lisäksi määrää annetulle $\delta > 0$ riittävän suuri t_δ siten, että $|u(\boldsymbol{x}_0, t)| \leq \delta$, kun $t > t_\delta$.

6. Tarkastellaan tehtävää
$$\min_{\substack{u \in C[0,1] \\ u(0) = a}} \int_0^1 u(x)^2 \sqrt{1 + u'(x)^2} \, dx.$$
Olkoon $u \in C^2[0,1]$ sen ratkaisu. Minkä differentiaaliyhtälön ja reunaehdot u toteuttaa?

Kaavoja kääntöpuolella!

Divergenssilause:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

Green 1:

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v\,\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Green 2:

$$\int_{\Omega} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu} - u\, \tfrac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma\,.$$

Green 3:

$$\int_{\Omega} \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,, \qquad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Parsevalin yhtälö:

$$\tfrac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = ||f||_2^2.$$

Fourier-muunnos ja -käänteismuunnos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx\,, \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Poissonin kaava kiekossa:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - t)} f(t)\, dt\,.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\phi}\, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\, u_{\phi}\,.$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\boldsymbol{v}| \le 1} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\,(t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}|^2}}\, d\boldsymbol{v}\,.$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\boldsymbol{v}| = 1} \left[\tfrac{\partial}{\partial t} \left(t\, f(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v}) \right) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\,\boldsymbol{v}) \right] d\sigma_{\boldsymbol{v}}\,.$$

Kaikilla $\nu \in \mathbb{R}$ Besselin funktio J_ν toteuttaa differentiaaliyhtälön:

$$r^2 u''(r) + r u'(r) + (r^2 - \nu^2) u(r) = 0.$$