Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Lassas/Lukkari

# Mat-1.404 Matematiikan peruskurssi L4

2. välikoe 21.3.2005

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

**Laskimet ovat kiellettyjä.**

1. Etsi muodollinen ratkaisu yhtälölle

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \alpha u, & \Omega = (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u(0,y) = h(y), & u(\pi,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, & u(x,\pi) = 0, \end{cases}$$

$\frac{1}{2}$ – $\frac{1}{3}$

missä $\alpha > 0$.

2. (a) Ratkaise muodollisesti Fourier-muunnoksen avulla tehtävä

$$\begin{cases} u_t(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ ja } t > 0, \\ u(\boldsymbol{x},0) = f(\boldsymbol{x}). \end{cases}$$

(b) Laske $u(\boldsymbol{x},1)$, kun $f(\boldsymbol{x}) = e^{-|\boldsymbol{x}|^2}$. $\frac{1}{4}$

(c) Selitä, mikä on Duhamelin periaate lämpöyhtälölle.

3. Olkoon $\Omega = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| < 1\}$ tason yksikkökiekko.

(a) Ratkaise tehtävä

$$\begin{cases} u_{tt}(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x} \in \Omega \text{ ja } t > 0, \\ u(\boldsymbol{x},t) = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \\ u(\boldsymbol{x},0) = 0, \\ u_t(\boldsymbol{x},0) = f(|\boldsymbol{x}|) \end{cases}$$

$\frac{1}{4}$

muodollisesti napakoordinaattien avulla.

(b) Mikä ratkaisu on, jos $f(r) = J_0(\nu_1 r)$, missä $J_0$ on Besselin funktio ja $\nu_1$ sen ensimmäinen nollakohta?

4. Tarkastellaan aaltoyhtälöä

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & \boldsymbol{x} \in \Omega \text{ ja } t > 0, \\ u(\boldsymbol{x},t) = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \\ u(\boldsymbol{x},0) = f(\boldsymbol{x}), \\ u_t(\boldsymbol{x},0) = g(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{1}$$

normaalialueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Määrittele aallon energia.

(b) Todista energiansäilymislaki.

(c) Näytä, että ongelmalla (1) on korkeintaan yksi ratkaisu $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$.

Divergenssilause:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma\,.$$

Green 1:

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla u + v\, \Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Green 2:

$$\int_\Omega (v\, \Delta u - u\, \Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} (v\, \tfrac{\partial u}{\partial \nu} - u\, \tfrac{\partial v}{\partial \nu})\, d\sigma\,.$$

Green 3:

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma\,.$$

Fourier-sarja välillä $[-L, L]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right],$$

$$a_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,, \quad b_k = \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx\,.$$

Fourier-muunnos ja -käänteismuunnos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx\,, \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)\, d\omega\,.$$

Besselin yhtälö:

$$\rho^2 J_m''(\rho) + \rho J_m'(\rho) + (\rho^2 - m^2) J_m(\rho) = 0.$$

Laplacen operaattori napakoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{1}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}\,.$$

Laplacen operaattori pallokoordinaateissa:

$$\Delta u = u_{rr} + \tfrac{2}{r}\, u_r + \tfrac{1}{r^2 \sin^2\phi}\, u_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2}\, u_{\phi\phi} + \tfrac{\cot\phi}{r^2}\, u_\phi\,.$$

D'Alembertin kaava:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\, [\, f(x+ct) + f(x-ct)\,] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds\,.$$

Kirchhoffin kaava kahdessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\boldsymbol{v}| \le 1} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\, (t\, f(\boldsymbol{x} + ct\, \boldsymbol{v})) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\, \boldsymbol{v})}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{v}|^2}}\, d\boldsymbol{v}\,.$$

Kirchhoffin kaava kolmessa dimensiossa:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\boldsymbol{v}|=1} \left[\, \tfrac{\partial}{\partial t}\, \big(\, t\, f(\boldsymbol{x} + ct\, \boldsymbol{v})\,\big) + t\, g(\boldsymbol{x} + ct\, \boldsymbol{v})\,\right] d\sigma_{\boldsymbol{v}}\,.$$