(Huomaa, että toisella sivulla on pari yhtälöä ja taulukko, joista voi olla apua...)

1. Fyysikko J. Ärkevä tutkii yksidimensioista hiukkasmallia ja väittää, että vapaiden hiukkasten kineettinen energia liikemäärän funktiona onkin tavallisuudesta poiketen muotoa

$$E_{\text{kin}} = \alpha p^3,$$

missä α on hiukkastyypistä riippuva reaalinen vakio. Tutkitaan hänen väitettään kvanttimekaniikan kannalta.

a) Käyttäen hyväksi tavallisen kvanttimekaniikan formalismia, miten kvantisoit tämän uuden kineettisen energian, eli mitä muotoa on vapaan hiukkasen Hamiltonin operaattori J. Ärkevän mukaan?

b) Kvanttimekaniikassa on jostakin syystä tärkeää, että fysikaalisia suureita vastaavat operaattorit ovat hermiittisiä. Määrittele, mikä on lineaarinen hermiittinen operaattori, ja kerro, mitä tärkeitä ominaisuuksia kvanttimekaniikan kannalta tällaisilla operaattoreilla on.

c) Onko a) -kohdan operaattori lineaarinen ja hermiittinen? Onko siten J. Ärkevän esittämä teoria tämän tarkastelun puitteissa sopusoinnussa vaiko ristiriidassa kvanttimekaniikan perusteiden kanssa?

2. Olkoon fysikaalista systeemiä vastaava Hamiltonin operaattori $\hat{H}$, ja $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ tämän kaksi normitettua ominaistilaa vastaten ominaisenergioita E_1 ja E_2, $E_1 \neq E_2$. Määritellään näiden tilojen välinen Bohrin taajuus $\omega = (E_1 - E_2)/\hbar$.

(a) Osoita, että tilat $|\psi_1\rangle$ ja $|\psi_2\rangle$ ovat ortogonaalisia.

(b) Laske $\langle E\rangle$ ja ΔE tilassa $|\psi_-\rangle = (|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle)/\sqrt{2}$.

(c) Oletetaan, että systeemi on ajanhetkellä $t = 0$ tilassa $|\psi_-\rangle$. Mikä on systeemin tila ajanhetkellä $t > 0$?

(d) Tarkastellaan hermiittistä operaattoria $\hat{A}$, jolle pätee $\hat{A}|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$ ja $\hat{A}|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$. Mitkä ovat operaattorin $\hat{A}$ ominaisarvot tilojen $|\psi_1\rangle$ ja $|\psi_2\rangle$ virittämässä aliavaruudessa?

(e) Mitkä ovat edellisen kohdan vastaavat $\hat{A}$:n ominaisvektorit?

(f) Oletetaan, että systeemi on ajanhetkellä $t = 0$ tilassa $|\psi_-\rangle$. Jos operaattoria $\hat{A}$ vastaavaa suuretta mitattaisiin tässä tilassa, mikä on todennäköisyys saada tulos -1? Entä jos mittaus suoritettaisiin myöhempänä ajan hetkenä $t > 0$?

3. Luennoilla ratkaistiin ratakulmaliikemääräoperaattoreiden $\hat{\mathbf{L}}^2$ ja $\hat{L}_z$ yhteisten ominaistilojen aaltofunktiot paikkaesityksessä. Mutta mikä on esim. operaattoreiden $\hat{\mathbf{L}}^2$ ja $\hat{L}_y$ yhteisen normitetun ominaistilan aaltofunktio vastaten ominaisarvoja $2\hbar^2$ ja $\hbar$? Esitä tämä ominaistila myös operaattoreiden $\hat{\mathbf{L}}^2$ ja $\hat{L}_z$ yhteisten ominaistilojen aaltofunktioiden avulla! (Vinkki: Sinun ei tarvitse alkaa ratkaisemaan diffiksiä...)

(jatkuu...)

4. Tarkastellaan kolmen spin-$\frac{1}{2}$ -hiukkasen systeemiä (eli kullakin hidulla on sisäinen kulmaliikemäärä vastaten kvanttilukua $j = \frac{1}{2}$). Systeemin Hamiltonin operaattori on muotoa

$$\hat{H} = A\hat{\mathbf{S}}^2 + B\hat{S}_z,$$

missä

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2 + \hat{\mathbf{S}}_3$$

on systeemin kokonaisspin. Mitä arvoja systeemin energia voi saada? Mitkä ovat vastaavat energian ominaistilat kytketyn ja kytkemättömän kannan tilojen avulla lausuttuna?
(Vihje:
1) Muodosta ensin kulmaliikemäärää $\hat{\mathbf{S}}_{12} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$ vastaavien operaattoreiden $\hat{\mathbf{S}}_{12}^2$ ja $\hat{S}_{12z}$ yhteiset ominaistilat.
2) Muodosta kokonaisspiniä $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_{12} + \hat{\mathbf{S}}_3$ vastaavat ominaistilat.)

+Bonustehtävä
Eli kommentoi vapaasti kurssia tähän asti, mikä hyvää, mikä huonoa? Onko etenemistahti ollut liian nopea/hidas? Parannusehdotuksia?
(Tästä ei valitettavasti anneta pisteitä, mutta rakentava palaute auttaa kurssin kehittämisessä...)

Apuja:

$$\hat{J}_\pm |jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j, m\pm 1\rangle$$

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad Y_1^{\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(\cos^2\theta - 1), \quad Y_2^{\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}, \quad Y_2^{\pm 2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$