Teknillinen korkeakoulu Peltonen

Mat-1.403, Matematiikan peruskurssi L 3

2. välikoe, 8. 11. 2004

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH

1. Määrää integraalin
$$\int_0^{2\pi} \frac{(\sin\theta)^2 \mathrm{d}\theta}{5 + 4\cos\theta}$$
arvo residylausetta käyttäen.

2. Olkoon V enintään astetta 2 olevien yhden reaalimuuttujan reaalilukukertoimisten polynomien muodostama vektoriavaruus. Määritellään kuvaus $A : V \to \mathbb{R}$ asettamalla
$$A(p) = \int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x, \text{ kun } p \in V.$$
   (a) Osoita, että A on lineaarinen kuvaus.

   (b) Määrää A:n ytimen dimensio.

3. Olkoon W enintään astetta 3 olevien yhden reaalimuuttujan reaalilukukertoimisten polynomien muodostama vektoriavaruus ja $D : W \to W$ tavallinen derivointi yhden reaalimuuttujan suhteen.

   (a) Muodosta lineaarikuvauksen D matriisi W:n tavallisessa kannassa $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, missä $f_i(t) = t^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

   (b) Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja
$$\begin{aligned} g_1 &= f_1, \\ g_2 &= af_1 + f_2, \\ g_3 &= a^2 f_1 + 2af_2 + f_3, \\ g_4 &= a^3 f_1 + 3a^2 f_2 + 3af_3 + f_4. \end{aligned}$$
   Muodosta kuvauksen D matriisi kannassa $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.
   (Vihje: Joissakin ratkaisutavoissa kääntöpuolen matriiseista voi olla hyötyä)

4. Laske vektorin $\boldsymbol{v}$ kohtisuora projektio vektoreiden $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$ virittämälle aliavaruudelle, kun
$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{a}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -2a & 1 & 0 \\ -a^3 & 3a^2 & -3a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & --a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & -3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ -a^2 & 2a & 1 & 0 \\ a^3 & -3a^2 & 3a & 1 \end{pmatrix}$$