

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AUT, BIO, EST, GMA, INF, KEM, KON, KTA, MAK, MAR, PUU, RYK, TFY, TLT, TIK, TUO

1. Määää Gershgorinin ympyrälauseen avulla kompleksitason kiekot, jotka sisältävät matriisiin

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot. Huom. Ominaisarvoja ei tarvitse laskea.

2. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Määää e^{tA} .
(b) Määää matriisin A logaritminen normi $\mu(A)$.
(c) Etsi b)- kohdan avulla yläraja matriisinnormille $\|e^{tA}\|$.

3. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $x' = Ax$, missä

$$A = \begin{pmatrix} a & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}, a, k \in \mathbb{R}.$$

Voiko origo olla

- (a) satula
(b) nielu
(c) lähde
(d) keskus
(e) stabiili fokus
(f) epästabiili fokus

joillakin reaalityyppien k, a valinnalla?

4. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$y'' + 3y' + 2y = 1, y(0) = 0, y'(0) = 2$$

käyttäen Laplacen muunnosta. Huom. Laplacen muunnoksia löytyy paperin kääntöpuolelta.

Keskeisiä Laplace-muunnoskaavoja: $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$:

| $f(t)$ | $F(s)$ | $f(t)$ | $F(s)$ |
|----------|-------------------------|------------------|---------------------------|
| 1 | $1/s$ | $\cos \omega t$ | $s/(s^2 + \omega^2)$ |
| t^n | $n!/s^{n+1}$ | $\sin \omega t$ | $\omega/(s^2 + \omega^2)$ |
| e^{at} | $1/(s - a)$ | $\cosh \omega t$ | $s/(s^2 - \omega^2)$ |
| t^a | $\Gamma(a + 1)/s^{a+1}$ | $\sinh \omega t$ | $\omega/(s^2 - \omega^2)$ |
| $f'(t)$ | $sF(s) - f(0)$ | $f''(t)$ | $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ |