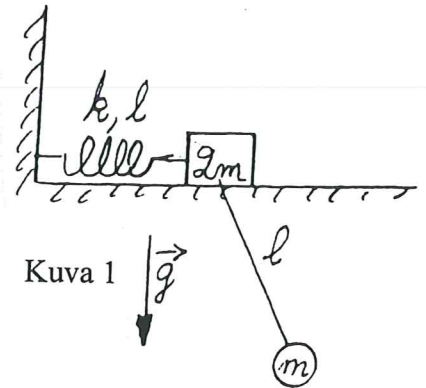


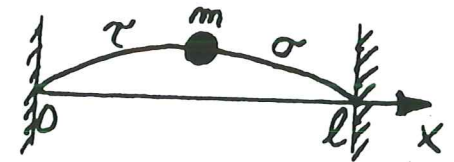
Tfy-0.2113 Teorettinen mekaniikka tentti 30.8.2007

1. Kuvan 1 systeemi koostuu vaakatasolla kitkattomasti liikkuvasta massasta $2m$, joka on kiinnitetty painottomalla jousella (jousivakio = $k = 2 mg/l$, pituus venymättömänä = l) seinään ja massasta m , joka on kiinnitetty painottomalla l :n pituisella langalla massa $2m$. Koko systeemi liikkuu kuvan 1 pystytasossa. Määritä systeemin pienten värähtelyjen ominaiskulmataajuudet ja normaalimoodit. (8 p.)



Kuva 1

2. Tarkastellaan kuvan 2 päistään kiinnitetyn kielen [jännitysvoima = τ (vakio), pituus = l , massa pituusyksikköä kohden = σ (vakio)] pieniä poikittaisia värähtelyjä. Kielen keskelle on kiinnitetty m -massainen hiukkanen.



Kuva 2

- a) Johda arvio kielen alimmalle ominaiskulmataajuudelle ω Rayleigh-Ritzin variaatiomenetelmällä, jonka funktionaali on muotoa $\int [\tau(x)(d\rho/dx)^2 + v(x)\rho^2] dx / \int \sigma(x)\rho^2 dx$,

käyttäen ominaisfunktioille approksimaatiota

$$\rho_1(x) = \sin(\pi x / l).$$

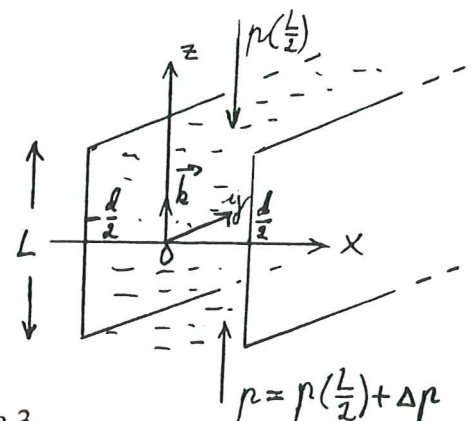
- b) Tarkka (alin) ominaiskulmataajuus ω voidaan ratkaista transkendenttaalisesta yhtälöstä

$$\xi \tan \xi = \sigma l / m, \quad (1)$$

$$\text{missä } \xi = \omega l / (2c), \quad c = (\tau / \sigma)^{1/2}.$$

Vertaa a)-kohdan ω :n arvoa yhtälöstä (1) saatavaan tarkkaan arvoon rajoilla $\sigma l \gg m$ ja $m \gg \sigma l$ ja selitä, mistä mahdolliset erot johtuvat. (7p.)

3. Tarkastellaan kuvan 3 mukaista kanavaa, jonka reunat ovat etäisyydellä d toisistaan. Äärettömien levyjen välissä virtaa stationäärisesti nestettä, jonka viskositeettikerroin = η ja tiheys = $\rho = \text{vakio}$. Ulkoisia tilavuusvoimia ei ole ($\vec{f} = 0$). Virtausta pitää yllä z -akselin suuntainen painegradientti. Paine vähenee tasaisesti siten, että L :n pituisella matkalla paine p vähenee Δp :n verran. Olettaen, että nopeuskenttä on muotoa $\vec{v} = v_z(x)\vec{k}$, ratkaise nopeusjakautuma $v_z(x)$. (7 p.)



Kuva 3

4. Kirjoita modifioitu Hamiltonin periaate n :n vapausasteen systeemille ($n < \infty$) ja johda periaatteesta Hamiltonin kanoniset liikeyhtälöt. (8p.)