

Teknillinen korkeakoulu

Mat-1.1010 Matematiikan peruskurssi L1

2. välikoe 20.11.2006 klo 16–19.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Huom: Ei laskimia eikä taulukoita!

1. Määritellään lukujono $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ palautuskaavalla

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 + a_n}, \quad \text{kun } n \geq 1.$$

Osoita, että jono suppenee ja määritä sen raja-arvo.

Vihje: Kokeile, arvaa, todista.

2. a) Olkoot $x_1 < x_2$ irrationaalilukuja. Osoita, että niiden välissä on rationaaliluku. Täsmällinen perustelu!

b) Lukujonoista $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oletetaan, että $a_n > 0, b_n > 0$ kaikilla n ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Osoita määritelmiä käyttämällä, että $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = \infty$.

3. a) Oletetaan, että sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yleiselle termille a_n on kaikilla n voimassa

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

missä $0 \leq q < 1$ on vakio. Osoita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee.

b) Tutki seuraavien sarjojen suppenemista; jälkimmäistä kaikilla muuttujan x arvoilla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n} x^{2n}.$$

4. a) Määritä funktion $f: [0, \infty) \rightarrow B$, $f(x) = 2x/(1+x)$, arvojoukko B . Osoita, että f on bijektio ja muodosta sen käänteisfunktion lauseke.

b) Muodosta jollakin välillä $[0, a]$ määritelty parametrisointi sille tasokäyrälle, joka kulkee pisteestä $A = (2, 0)$ pisteeseen $B = (-2, 0)$ pitkin puoliellipsiä $x^2 + 4y^2 = 4$, $y \geq 0$, ja palaa alkupisteeseen A janaa BA pitkin.

Provet på svenska: Vänd!