Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.1010 Matematiikan peruskurssi L1
Alestalo/Aalto

Tentti ja välikoeuusinnat 12.1.2007.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Ei laskimia eikä taulukoita!

Välikokeet **3 tuntia**, tentti **4 tuntia**.

Välikoe 1: teht. 1-4. **Välikoe 2:** teht. 5-8. **Välikoe 3:** teht. 9-12.
Tentti: teht. I = 3, II = 4a + 5a, III = 6a + 7b, IV = 10, V = 11b + 12a.

1. a) Määritä differentiaaliyhtälön $y' + 2y = 6$ yleinen ratkaisu.
   b) Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + 3y' - 4y = 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

2. Kolmion kärjet ovat pisteissä (x_1, y_1), (x_2, y_2) ja (x_3, y_3). Määritä vektorilaskennan avulla kolmion kahden keskijanan (mediaanin) leikkauspisteen koordinaatit. Kyseiset kaksi keskijanaa voi valita vapaasti.

3. Lento Pietarista P = (60° N, 30° E) Sydneyhin S = (30° S, 150° E) seuraa lyhintä mahdollista reittiä, eli Maan pintaa ($r = 1$) pisteiden O = origo = Maan keskipiste, P ja S määräämässä tasossa. Missä kohdassa lentokone ylittää päiväntasaajan? Vastauksen voi antaa muodossa $\tan\varphi =$ lukuarvo. Paikkavektorin lauseke
$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$
oletetaan tunnetuksi.

4. Olkoot $a, b > 0$.
   a) Kirjoita $a + ib$ polaarimuodossa $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
   b) Laske $(a + ib)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$ ja päättele polaarimuotoja tutkimalla vakiot A ja δ kaavassa $a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) = A\sin(\omega t + \delta)$.

5. Osoita induktiolla, että
   a) kaikilla $n \in \mathbf{N}$ pätee $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.
   b) jos $a_0 = 0$ ja $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ kaikilla $n \geq 0$, niin $a_n \leq 2$ kaikilla n.

6. a) Esitä Cauchy-jonon määritelmä ja osoita määritelmästä lähtien, että jokainen Cauchy-jono on rajoitettu.
   b) Olkoon $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aidosti kasvava reaalilukujono. Pitääkö paikkansa:
$$\text{on olemassa } \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbf{R} \iff \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0?$$

7. Tutki seuraavien sarjojen suppenemista; keskimmäistä kaikilla $x \in \mathbf{R}$:
$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}.$$

8. a) Määrittele jokin bijektio $f\colon (0,\infty) \to (0,1)$. Tunnettuja alkeisfunktioita saa käyttää, mutta bijektiivisyys täytyy perustella.
   b) Muodosta jokin parametrisointi sellaiselle käyrälle, joka yhdistää pisteet $(1, 0, 1)$ ja $(0, 1, -1)$ pitkin pallopintaa $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; ts. käyrä sisältyy ko. pallopinnalle ja sillä on annetut alku- ja loppupisteet.

9. Muotoile "Differentiaalilaskun väliarvolause" (eli toinen väliarvolause) ja esitä sen todistus. Tarvittavia aputuloksia ei tarvitse todistaa.

10. Tarkastellaan parametrisoitua tasokäyrää $x = \cos t$, $y = \sin(2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, joka muistuttaa ∞-merkkiä.
    a) Käyrä leikkaa itseään origossa (parametrin arvot $t = \pi/2$ ja $t = 3\pi/2$). Määritä vastaavien tangenttivektoreiden välinen kulma $\alpha \in [0, \pi/2]$.
    b) Millä parametrin $t \in [0, \pi/2]$ arvolla piste $(x(t), y(t))$ on kauimpana origosta?

11. a) Osoita, että yhtälöllä $x^3 + x - 1 = 0$ on yksikäsitteinen ratkaisu alueessa $x > 0$.
    b) Selitä lyhyesti Newtonin iteraatiomenetelmä ja sovella sitä a-kohdan yhtälöön (kaksi askelta ja sopiva alkuarvo).

12. a) Määritä raja-arvo $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$.
    b) Olkoon $b > 0$. Laske raja-arvo $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
    Miten tulos liittyy yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisuihin?

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{2\pi}{3} & \frac{5\pi}{6} & \pi & \frac{7\pi}{6} & \frac{4\pi}{3} & \frac{3\pi}{2} & \frac{5\pi}{3} & \frac{11\pi}{6} & 2\pi \\ \sin\alpha & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \cos\alpha & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Provet på svenska: Vänd!