

## Mat-1.1030 Matematiikan peruskurssi L3

1. välikoe 16.10.2007

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

**Laskimet ovat kiellettyjä.**

1. Kompleksinen funktio  $f$  on derivoituva pisteessä  $z_0$ , jos raja-arvo

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

on olemassa, ja tällöin raja-arvoa merkitään  $f'(z_0)$ . Tutki, onko  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = x^2 + y^2 + ixy$  derivoituva pisteessä  $z_0 = 1 + i$

- Käyttäen Cauchy-Riemannin yhtälöitä
- Suoraan derivaatan määritelmästä
- Kerro lyhyesti, miten Cauchy-Riemannin yhtälöt voitaisiin johtaa (ei tarvitse johtaa).

2. Etsi funktiolle

$$\frac{3z - 7i}{z^2 - 3iz + 4}$$

kolme eri (Laurentin) sarjakehitelmää, jotka on kehitetty pisteen  $z_0 = i$  suhteen. Piirrä aluksi kuva singulariteettien sijainnista ja päättele, missä alueissa eri sarjakehitelmät pätevät.

3. a) Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Todista, että

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Vihje: Jos  $\alpha := \int_a^b f(t) dt \neq 0$ , niin voidaan kirjoittaa  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \frac{\alpha \bar{\alpha}}{|\alpha|} = \int_a^b \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|} f(t) dt$  ja lisäksi huomataan, että  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \in \mathbb{R}$ .

b) Olkoon  $C$  yksikköympyrän  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  ylemmässä puolitasossa olevan kaaren osan parametrisoiva polku. Näytä edellistä kohtaa hyödyntäen, että

$$\left| \int_C \frac{\cos z}{z^2} dz \right| \leq \frac{1}{2}(e^{-1} + e)\pi.$$

4. Laske kompleksianalyysia apuna käyttäen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$