Matematiikan laitos
Teknillinen korkeakoulu

Turunen/Tietäväinen

Mat-1.2990 Modernin analyysin perusteet

2. välikoe 15.3.2008 klo 10-13

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Koulutusohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KJO, KTA, KON, MAK, MAR, PUU, RAK, TFY, TIK, TLT, TUO, YHD.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia. Koeaika on 3h.

1. Selitä, mitä tarkoittavat käsitteet *ulkomitta*, *σ-algebra* ja *mitta*.

2. a) Miten määritellään *Lebesgue-ulkomitta* $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$?

   b) Olkoon $E \subset \mathbb{R}$, jolle $\lambda^*(E) = 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$.
   Todista, että on olemassa avoin joukko $U \subset \mathbb{R}$, jolle $E \subset U$ ja $\lambda^*(U) < \varepsilon$.

3. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio ja

$$U_k := \frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} \sup\left\{f(x) : \frac{j-1}{2^k} \le x < \frac{j}{2^k}\right\},$$

$$L_k := \frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} \inf\left\{f(x) : \frac{j-1}{2^k} \le x < \frac{j}{2^k}\right\}.$$

   Muodosta *yksinkertaiset Borel-mitalliset* funktiot $r_k, s_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, joille

$$r_k \le f \le s_k,$$

$$L_k = \int r_k \, d\lambda \qquad \text{ja} \qquad U_k = \int s_k \, d\lambda,$$

   missä λ on avaruuden $\mathbb{R}$ Lebesgue-mitta.

4. a) Muotoile *Lebesguen dominoidun konvergenssin lause* (jota ei tarvitse todistaa).

   b) Olkoot f, L_k, U_k kuten edellisessä tehtävässä 3. Oletetaan, että

$$\lim_{k\to\infty} L_k = \lim_{k\to\infty} U_k.$$

   Osoita, että

$$\lim_{k\to\infty} L_k = \int_{[0,1]} f \, d\lambda.$$

P.S. Tyhjä vastaus on arvoltaan 0 pistettä;
hyvistä yrityksistä ja kuvista voidaan palkita.