



Kokeessa saa käyttää laskimia.

Jokainen tehtävä on kuuden pisteen arvoinen. Moniosaisten tehtävien osien arvot ovat yhtäsuuret ellei erikseen mainita.

Tehtävät

TEHTÄVÄ 1 Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = x^3y^4 + 3xy - 5$.

(a) Laske funktion f gradientti pisteessä $(1, 2)$.

(b) Laske funktion f kaikki toiset derivaatat.

TEHTÄVÄ 2 Jos $u(x, y) = r^2 \ln r$, missä $r^2 = x^2 + y^2$, niin näytä että

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

TEHTÄVÄ 3 Piste $P = (1, -1, 2)$ sijaitsee pintojen

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0, \quad \text{ja} \quad G(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 9 = 0$$

leikkauskäyrällä c . Määritä taso, joka kulkee pisteen P kautta ja jonka normaali on c :n tangenttivektorin suuntainen pisteessä P .

TEHTÄVÄ 4 Mikä on pinta-alaltaan suurin suorakulmio, joka voidaan sijoittaa ellipsin $x^2 + 4y^2 = 4$ sisään? Muodosta sidottu ääriarvotehtävä ja ratkaise se!