T-61.238 Signaalien tilastollinen mallinnus

Tentti 19.12.2001

Tentissä saa olla mukana laskin (ei ohjelmoitava tai muisti tyhjä) ja matematiikan perustaulukot (ei taulukoita joissa on kurssin aiheisiin suoraan liittyvää materiaalia)

1. (max 4p) Selitä *lyhyesti* seuraavat asiat menemättä tarpeettomasti yksityiskohtiin:
i) Wiener-suodin (2p)
ii) Stationäärisyys (2p)

2. (max 4p) Mallinna väljässä mielessä stationäärinen prosessi $x(n)$ suodattamalla valkoista kohinaa $v(n)$ jonka varianssi on yksi, systeemin

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2}}$$

läpi. Käytä estimoituja autokorrelaatiofunktion arvoja $\hat{r}_x(0) = 0.9, \hat{r}_x(1) = -0.8$ ja $\hat{r}_x(2) = 0.6$. .

3. (max 4p) Nollakeskiarvoisen väljässä mielessä stationäärisen reaalisen prosessin $x(n)$ autokorrelaatiomatriisi on

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 4 & 2 & a \\ b & c & d \\ 1 & e & f \end{bmatrix}$$

Määrää a, b, c, d, e ja f (perustele) (1p).
Onko $\mathbf{x}^T\mathbf{R}_x\mathbf{x} < 0$ kun $\mathbf{x} = [-1.5, 2.25, 5]^T$? Perustele.(1p)
Onko $\lambda = -1$ matriisin $\mathbf{R}_x$ ominaisarvo (perustele)? (1p)
Jos oletetaan, että $x(n)$ on normaalijakautunut, niin mitä tiedät prosessin $x(n)$ jakaumasta (sanallinen selitys ilman kaavoja riittää)? (1p)

4. (max 6p) Vastaa seuraaviin väitteisiin joko “tosi” tai “epätosi” tai jätä vastaamatta. Oikea vastaus antaa yhden pisteen, väärä -1 pistettä ja vastaamatta jättäminen nolla pistettä. Vastauksia ei tarvitse perustella.
a) Kun tunnetaan satunnaisprosessin $x(n)$ kaikki autokorrelaatiot $r_x(k)$, niin prosessin tilastolliset ominaisuudet tunnetaan täysin.
b) Kaikkia väljässä mielessä stationäärisiä prosesseja ei voi esittää kausaalisen ja stabiilin suotimen vasteena, missä syöte on valkoista kohinaa.
c) LMS-algoritmi pienentää keskimääräistä neliöllistä virhettä jokaisella päivitysaskeleella.
d) Wiener-suotimen avulla saadaan kohina poistettua signaalista kokonaan myös halutun signaalin taajuuskaistalla.
e) Pisarenkon menetelmä ja MUSIC perustuvat siihen, että autokorrelaatiomatriisin ominaisvektorit ovat signaalivektoreita eli muotoa $\mathbf{e} = [1, \exp(j\omega), \exp(j2\omega), \ldots, \exp(j(M-1)\omega)]^T$.
f) Cramer-Raon alaraja on pienin varianssi, minkä harhaton estimaattori voi saavuttaa.

5. (max 6p) Kun näppäilet puhelinnumeron, niin äänitaajuuspuhelimessa kuulet kutakin näppäintä vastaavan äänen. Ääni koostuu kahdesta sinisignaalista eri taajuuksilla. Sinisignaalit poimitaan kahdesta neljän sinisignaalin ryhmästä niin, että mukana on aina yksi signaali kummastakin ryhmästä. Ryhmien sisältämien sinisigaalien taajuudet tunnetaan etukäteen. Näin voidaan muodostaa 16 eri näppäintä vastaavaa ääntä. Molempien sinisignaalien amplitudit ovat tietyissä rajoissa samat. Oletetaan, että olet suunnittelemassa digitaalista laitetta, joka vastaanottaa digitoituja äänisignaaleja. Laitteen pitäisi pystyä selvittämään mitä näppäinten painalluksia signaali sisältää. Tiedät, että signaalin näytteenottotaajuus on 8 kHz ja minkä tahansa näppäimen äänessä sinisignaalien taajuudet poikkeavat toisistaan vähintään 268 Hz.

Alkuverryttelynä estimoit taajuudet periodogrammilla. Arvioi suunnilleen kuinka kauan näppäintä pitää painaa, jotta periodogrammi pystyy erottelemaan taajuudet. (2p)

Suunnittele parempi menetelmä kuin periodogrammi. Menetelmän tulisi ottaa huomioon mahdollinen kohina sekä ennalta signaalista tunnetut asiat. Perustele menetelmäsi. (4p)