Teknillinen korkeakoulu
**Mat-1.1010 Matematiikan peruskurssi L1**

**1. välikoe** 16.10.2006 klo 16–19.
Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.
**Huom:** Ei laskimia eikä taulukoita!

1. Valitse a) **tai** b). (Koskee vain tehtävää 1)
   a) Ratkaise differentiaaliyhtälöön $y' = -4xy^2$ liittyvä alkuarvotehtävä $y(0) = 1$.
   b) Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + 2y' - 8y = e^{-3x}$ yleinen ratkaisu.

2. Tarkastellaan tason tai avaruuden vektoreita $\vec{a}$ ja $\vec{b}$.
   a) Sievennä $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ja osoita, että pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ määräytyy vektoreiden $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{a} - \vec{b}$ pituuksista.
   b) Todista ns. suunnikaslause $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.

3. Tarkastellaan pallokoordinaatistoa $(r, \theta, \varphi)$, kun $r = 1$.
   a) Oletetaan tunnetuksi yksikkövektorit
   $$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \quad \text{ja} \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$
   Määritä yksikkövektorin $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r$ lauseke, kun $\varphi = 90°$.
   b) Lento Pietarista P = (60° N, 30° E) Magadaniin M = (60° N, 150° E) seuraa lyhintä mahdollista reittiä, eli Maan pintaa pisteiden O = origo = Maan keskipiste, P ja M määräämässä tasossa. Kuinka kaukana pohjoisessa lentokone matkan aikana käy? Vastauksen voi antaa muodossa $\tan\theta$ = lukuarvo.
   Huom: Symmetriaa ja muita geometrisia ideoita saa käyttää hyväksi.

4. a) Määritä lausekkeiden $\sqrt[3]{i}$ ja $\sqrt[3]{-i}$ kaikki mahdolliset arvot muodossa $x + iy$.
   b) Ratkaisukaavaan mukaan kolmannen asteen yhtälön $z^3 - 3z = 0$ ratkaisu on muotoa $z = \sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i}$. Ratkaise yhtälö helpommalla tavalla ja osoita, että kaikki ratkaisut saadaan kaavasta valitsemalla kuutiojuurten arvot sopivalla tavalla toisistaan riippumatta. (Lisäksi saadaan ylimääräisiä lukuja, jotka eivät ole ratkaisuja!)

**Lisätieto:** Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

**Provet på svenska: Vänd!**

Tekniska högskolan
**Mat-1.1010 Grundkurs i matematik L1**

**1. mellanförhöret** 16.10.2006 kl. 16–19.
Fyll i all krävd information på alla svarspapper.
**Obs:** Inga kalkylatorer eller tabeller!

1. Välj a) **eller** b). (Gäller endast problemet 1)
   a) Lös begynnelsevärdesproblemet $y(0) = 1$ för differentialekvationen $y' = -4xy^2$.
   b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 2y' - 8y = e^{-3x}$.

2. Vi betraktar vektorerna $\vec{a}$ och $\vec{b}$ i planet eller i rymden.
   a) Förenkla $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ och visa, att skalarprodukten $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kan skrivas med hjälp av vektorernas $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{a} - \vec{b}$ längder.
   b) Visa den sk. parallellogramsatsen $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.

3. Vi betraktar de sfäriska koordinaterna $(r, \theta, \varphi)$, dä $r = 1$.
   a) Enhetsvektorerna
   $$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \quad \text{och} \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$
   antas givna. Bestäm formeln för enhetsvektern $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r$, dä $\varphi = 90°$.
   b) Ett flyg från St. Peterburg P = (60° N, 30° E) till Magadan M = (60° N, 150° E) följer den kortaste rutten, dvs. jordens yta i det planet som innehåller punkterna O = origo = jordens mittpunkt, P och M. Hur långt i norr flyger planet på rutten? Svaret kan ges på formen $\tan\theta$ = värde.
   Obs: Symmetrin och andra geometriska ideer får användas.

4. a) Bestäm alla möjliga värden av $\sqrt[3]{i}$ och $\sqrt[3]{-i}$ på formen $x + iy$.
   b) Enligt lösningsformeln för tredjegradsekvationer är lösningen till $z^3 - 3z = 0$ på formen $z = \sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i}$. Lös ekvationen på ett lättare sätt och visa, att alla lösningarna fås genom formeln om man väljer kubikrötternas värden lämpligt och oberoende av varandra. (Man får också andra värden, som inte är lösningar!)

**Extra information:** Några värden av trigonometriska funktioner:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |